Semaine 9 - Structures algébriques : Groupes

Seuls les groupes ont été traités. L'étude du groupe symétrique sera faite plus tard.

On pourra reprendre le programme d'arithmétique, ou bien avec le vocabulaire du chapitre précédent, ou bien en utilisant le nouveau vocabulaire des groupes.

1 Lois de composition interne

- Lois de composition interne (LCI)
- Associativité, élément neutre, symétrique, commutativité, élément simplifiable
- Itérés (ou puissances) d'un élément par une LCI
- Conventions d'écriture additive/multiplicative pour les LCI
- Lois $+$ et $\times$ sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

2 Groupes

- Groupe, groupe abélien, exemples (notamment $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$)
- Produit de groupes
- Sous-groupe
- Caractérisation des sous-groupes de $\mathbb{Z}$
- Caractérisation des sous-groupes de $\mathbb{R}$: de la forme $a\mathbb{Z}$ ou dense (= rencontre tout intervalle $]a, b[$, avec $a < b$)
- Intersection de sous-groupes
- Sous-groupe engendré par une partie A : caractérisation par le haut (intersection des sous-groupes contenant la partie) et par le bas (éléments obtenus par produit et inverse des éléments de A)
- Morphisme de groupes
- Noyau et image d'un morphisme ; ce sont des sous-groupes de l'espace de départ/-d'arrivée
- Le noyau caractérise l'injectivité ; l'image la surjectivité
- Endomorphisme, isomorphisme, automorphisme
- L'ensemble des automorphismes de G est un sous-groupe du groupe des permutations de G.
- Groupes monogènes
- Un groupe monogène infini est isomorphe à $\mathbb{Z}$; un groupe monogène fini de cardinal est isomorphe à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
- Ordre d'un élément dans un groupe ; *seulement un aperçu*

3 Reprise du programme d'arithmétique

- Programme précédent.

4 Exemples de questions de cours

- Caractérisation des sous-groupes de $\mathbb{Z}$
- Caractérisation des sous-groupes de $\mathbb{R}$
- Si A est une partie d'un groupe G,

$$\langle A \rangle = \{x_1 \dots x_k, k \in \mathbb{N} \text{ et } \forall i \in [\![1, k]\!], x_i \in A \text{ ou } x_i^{-1} \in A\}.$$

- Caractérisation des groupes monogènes - *On pourra se limiter au cas fini ou infini.*