Semaine 8 - Structures algébriques

Deuxième semaine sur les structures. Le lien entre l'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et l'arithmétique modulo n a été fait. Sur les groupes, un objectif est de bien manipuler la notion d'ordre. Rien d'exigible sur le groupe symétrique pour l'instant.

1 Lois de composition interne

- Lois de composition interne (LCI)
- Associativité, élément neutre, symétrique, commutativité, élément simplifiable
- Itérés (ou puissances) d'un élément par une LCI
- Conventions d'écriture additive/multiplicative pour les LCI
- LCI $+$ et $\times$ sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

2 Groupes

- Groupe, groupe abélien, exemples (notamment $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$)
- Produit de groupes
- Sous-groupe
- Caractérisation des sous-groupes de $\mathbb{Z}$
- Caractérisation des sous-groupes de $\mathbb{R}$: de la forme $a\mathbb{Z}$ ou dense (= rencontre tout intervalle $]a, b[$, avec $a < b$)
- Intersection de sous-groupes
- Sous-groupe engendré par une partie A : caractérisation par le haut (intersection des sous-groupes contenant la partie) et par le bas (éléments obtenus par produit et inverse des éléments de A)
- Morphisme de groupes
- Noyau et image d'un morphisme ; ce sont des sous-groupes de l'espace de départ/-d'arrivée
- Le noyau caractérise l'injectivité ; l'image la surjectivité
- Endomorphisme, isomorphisme, automorphisme
- L'ensemble des automorphismes de G est un sous-groupe du groupe des permutations de G.

3 Anneaux/corps

- Anneau, anneau commutatif, anneau nul

- Règles de calcul dans un anneau ; identité de Bernoulli, formule du binôme de Newton (pour des éléments qui commutent)
- Anneau (commutatif) intègre
- Groupe des inversibles d'un anneau
- Corps
- Sous-anneau, sous-corps
- Morphisme d'anneaux
- Un morphisme de corps est injectif
- Caractéristique d'un corps

4 Compléments - HP

- Groupes monogènes, caractérisation
- Inversibles de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. *La caractéristique d'Euler $\phi(n)$ n'a pas été définie en cours.*
- $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est un corps ssi n est premier
- Théorème des restes chinois : si $n \wedge m = 1$, $\mathbb{Z}/nm\mathbb{Z}$ est isomorphe à l'anneau produit $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ (*Il faut être capable d'exhiber l'isomorphisme et son inverse.*)

5 Exemples de questions de cours

- Démonstration (efficace) qu'une partie est un sous-groupe/sous-anneau/sous-corps ; qu'une application est un morphisme de groupes/d'anneaux/de corps.
- Caractérisation des sous-groupes de $\mathbb{R}$
- Théorème des restes chinois (version anneaux)
- $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est un corps ssi n est premier.
- La caractéristique d'un corps est 0 ou un nombre premier.