

## DM 7 - Valeurs d'adhérence – Lemme de Fekete

### 1 Valeurs d'adhérence d'une suite qui s'épuise

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de réels telle que  $\lim_n (u_{n+1} - u_n) = 0$ . On cherche à montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de  $(u_n)$  est un intervalle. On fixe  $a < b$  deux valeurs d'adhérence de  $(u_n)$  et un réel  $c \in ]a, b[$ . Enfin, on fixe  $\varepsilon > 0$  tel que  $\varepsilon < \min(c - a, b - c)$ .

1. Soit  $N \in \mathbb{N}$ . Montrer qu'on peut trouver deux entiers  $N_1$  et  $N_2$  vérifiant  $N \leq N_1 < N_2$  et tels que  $|u_{N_1} - a| < \varepsilon$  et  $|u_{N_2} - b| < \varepsilon$ . Montrer qu'on a aussi  $u_{N_1} < c < u_{N_2}$ .
2. En déduire que l'ensemble  $\{k \in \mathbb{N} \mid |u_k - c| < \varepsilon\}$  est infini.
3. En déduire que  $c$  est une valeur d'adhérence de  $(u_n)$ . Conclure.

On note  $I$  l'ensemble des valeurs d'adhérence de  $(u_n)$ .

4. Dans le cas où  $I$  est borné à gauche / borné à droite / borné, montrer qu'il contient sa (ses) borne(s).

### 2 Lemme de Fekete

Soit  $(x_n)_{n \geq 1}$  une suite réelle telle que, pour tous  $n, p \in \mathbb{N}^*$ ,  $x_{n+p} \leq x_n + x_p$ . On pose

$$E = \left\{ \frac{x_n}{n}, n \in \mathbb{N}^* \right\}.$$

1. Soit  $d \in \mathbb{N}^*$ . Si  $n \geq d$ , on note  $n = dq + r$ , la division euclidienne de  $n$  par  $d$ . Montrer que  $x_n \leq qx_d + x_r$ .
2. En déduire que  $\forall n \geq d, \frac{x_n}{n} \leq \frac{x_d}{d} + 2\frac{X_d}{n}$ , où  $X_d = \max(|x_1|, \dots, |x_d|)$ .
3. On suppose que  $E$  est minoré. Montrer que  $\left(\frac{x_n}{n}\right)$  tend vers  $\inf(E)$ .  
*C'est le lemme sous-additif, ou lemme de Fekete.*

### 3 Chemins auto-évitant dans $\mathbb{Z}^2$

Un pas dans  $\mathbb{Z}^2$  est un élément de  $\mathcal{P} = \{(1, 0), (0, 1), (-1, 0), (0, -1)\}$ . Un chemin de longueur  $n \in \mathbb{N}$  dans  $\mathbb{Z}^2$  est une  $(n + 1)$ -liste  $(s_0, \dots, s_n)$  d'éléments de  $\mathbb{Z}^2$  telle que  $s_0 = (0, 0)$  et, telle que pour tout  $k \in \llbracket 0, n - 1 \rrbracket$ ,  $s_{k+1} - s_k$  est un pas. Un tel chemin est auto-évitant si la liste est sans répétition. On note  $c_n$  le nombre de chemins de longueur  $n$  auto-évitants.

1. Illustrer ces définitions.
2. Déterminer  $c_n$  pour  $n \in \llbracket 0, 4 \rrbracket$ .
3. Montrer que pour tous  $n, p \in \mathbb{N}$ ,  $c_{n+p} \leq c_n c_p$ .
4. En déduire que la suite  $(\sqrt[n]{c_n})_{n \geq 1}$  converge vers un réel<sup>1</sup>  $\mu \in [2, 3]$ .

Une conjecture affirme qu'il existe deux constantes  $c$  et  $\gamma$  telles que  $c_n \sim c \mu^n n^\gamma$ . On suppose dans la suite que cette conjecture est vraie.

5. Montrer que  $\frac{c_{n+1}}{c_n}$  tend vers  $\mu$ .
6. Interpréter la quantité  $\frac{c_{2n}}{c_n^2}$  et en déterminer un équivalent.
7. En déduire une expression de la constante<sup>2</sup>  $\gamma$  comme la limite d'une suite ne dépendant que de  $c_n$ .
8. Écrire un programme<sup>3</sup> calculant  $c_n$  ; vérifier empiriquement les valeurs de  $\mu$  et  $\gamma$ .

---

<sup>1</sup>La valeur exacte est inconnue. On sait cependant que  $\mu \in [2, 6; 2, 7]$ . Pour le problème analogue où on considère des chemins sur le réseau hexagonal (les pas sont les racines 6-èmes de l'unité), la constante  $\mu$  vaut  $\sqrt{2 + \sqrt{2}}$ , *Smirnov et Duminil-Copin, 2008*.

<sup>2</sup>Il est aussi conjecturé que  $\gamma = \frac{11}{32}$ .

<sup>3</sup>Question bonus