

Semaine 9 – Suites

Le chapitre est presque fini mais peu d'exercices ont été traités.

Il manque les suites à valeurs complexes et quelques compléments hors-programme.

1 Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

- Formules pour le terme général d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2 ; pour des suites à valeurs complexes ; pour des suites à valeurs réelles quand les coefficients sont réels.

Les idées derrière l'obtention de ces formules ont été présentées mais ne sont pas un attendu.

2 Limites de suites

- Limite finie, limite infinie, unicité de la limite
- Caractérisation séquentielle de la borne supérieure
- Caractérisation séquentielle de la densité
- Opérations élémentaires sur les limites
- Théorème de composition de limites suite/fonction (en supposant connue la notion de limite pour une fonction)
- Une suite convergente est bornée
- Passage à la limite dans les inégalités sur les suites
- Théorème d'encadrement, théorème de comparaison
- Localisation asymptotique : si (u_n) tend vers ℓ et (v_n) tend vers $\ell' > \ell$, alors à partir d'un certain rang, $v_n > u_n$.
- Fonction extractrice, suite extraite, valeur d'adhérence
- Si une suite a une limite, toutes ses suites extraites aussi
- Caractérisation des valeurs d'adhérence :
 a est v.a. ssi pour tout $\varepsilon > 0$, $\{n \in \mathbb{N} \mid |u_n - a| \leq \varepsilon\}$ est infini.

3 Théorèmes fondamentaux sur les suites

- Théorème de la limite monotone
- Théorème des suites adjacentes
- Théorème de Bolzano-Weierstrass : par lemme des pics ou par dichotomie

4 Introduction à l'analyse asymptotique

On insiste surtout sur l'équivalence des suites. L'objectif est de comprendre progressivement l'intérêt de l'obtention d'équivalents.

- Notations de Landau O , o et \sim
- Reformulations en termes de quotients
- \sim est une relation d'équivalence
- Relations entre \sim et limites ; règles de calcul avec \sim
- Pas de composition d'équivalents : cas particuliers de l'exponentielle et du logarithme
- Obtention d'équivalents par développement limité à l'ordre 1, équivalents usuels
- Théorèmes de croissance comparée ; *on doit pouvoir comparer rapidement la vitesse de divergence vers $+\infty$ ou de convergence vers 0 de différentes suites.*

5 Exemples de questions de cours

- Calculs de limites (*ne nécessitant pas de calcul asymptotique poussé*)
- Suites arithmético-géométriques (rappel)
- Suites récurrentes linéaires d'ordre 2
- Définition et caractérisation des valeurs d'adhérence d'une suite
- Caractérisation séquentielle de la densité/de la borne supérieure
- Théorème de la limite monotone
- Théorème de Bolzano-Weierstrass (démonstration au choix)
- Si une suite bornée admet une unique valeur d'adhérence, alors elle converge vers cette valeur.