DM 7 - Lemme de Fekete et applications

1 Valeurs d'adhérence d'une suite qui s'épuise

1. Comme a est valeur d'adhérence de (u_n), on peut trouver un indice $N_1 \geq N$ tel que $|u_{N_1} - a| < \varepsilon$. Comme b est valeur d'adhérence de (u_n), on peut trouver un indice $N_2 > N_1$ tel que $|u_{N_2} - b| < \varepsilon$. On a en particulier
$$u_{N_1} < a + \varepsilon < c \text{ et } u_{N_2} > b - \varepsilon > c,$$
donc $u_{N_1} < c < u_{N_2}$.

2. On fixe $N \in \mathbb{N}$. Comme $u_{n+1} - u_n \to 0$, on peut trouver $N_0 \geq N$ tel que $|u_{n+1} - u_n| < \varepsilon$ si $n \geq N_0$. On considère alors N_1 et N_2 comme dans la question précédente tels que $N_0 \leq N_1 < N_2$ (donc avec N_0 au lieu de N). L'ensemble des $k \in [\![N_1, N_2 - 1]\!]$ tels que $u_k < c$ est non vide car il contient N_1 ; on considère un tel k maximal. Par construction, on a $u_k < c \leq u_{k+1} < u_k + \varepsilon$.
On a ainsi montré qu'on peut trouver des entiers k plus grand que n'importe quel entier N fixé dans l'ensemble $\left\{k \in \mathbb{N} \mid |u_k - c| < \varepsilon\right\}$. Ceci montre que cet ensemble est infini.

3. D'après le cours, c est une valeur d'adhérence de (u_n). Ceci montre que l'ensemble des valeurs d'adhérence de (u_n) est une partie convexe de $\mathbb{R}$, donc un intervalle.

4. On va montrer plus généralement le résultat suivant, qui implique immédiatement celui de l'énoncé.
Soit (u_n) une suite et soit V l'ensemble de ses valeurs d'adhérence. Alors V est un ensemble fermé : si $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente à valeurs dans V, alors sa limite est dans V.

   Avec ces notations, notons v la limite de $(v_k) \in V^{\mathbb{N}}$. Soit $\varepsilon > 0$. On peut trouver $K \in \mathbb{N}$ tel que $|v_K - v| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Comme v_K est une valeur d'adhérence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, l'ensemble $\left\{n \in \mathbb{N} \mid |v_K - u_n| < \dfrac{\varepsilon}{2}\right\}$ est infini. Or, cet ensemble est inclus dans $\left\{n \in \mathbb{N} \mid |u_n - v| < \varepsilon\right\}$; en effet, si $|v_K - u_n| < \dfrac{\varepsilon}{2}$, alors $|u_n - v| \leq |u_n - v_K| + |v_K - v| < 2 \times \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Ceci montre que v est une valeur d'adhérence de (u_n), donc que V est fermé.

2 Lemme de Fekete

1. Soient n, d deux entiers tels que $n \geq d$. La propriété vérifiée par (x_n) donne $x_{2n} \leq x_n + x_n = 2x_n$, puis $x_{3n} \leq x_{2n} + x_n \leq 3x_n$, etc. Par récurrence immédiate, on en déduit que
$$x_{qd} \leq q x_d.$$

Comme $x_n = x_{qd+r} \leq x_{qd} + x_r$, on en déduit $x_n \leq q x_d + x_r$.

2. On divise l'inégalité précédente par n :

$$\frac{x_n}{n} \leq \frac{q}{n} x_d + \frac{1}{n} x_r.$$

Comme $n = qd + r$, on a $\frac{q}{n} = \frac{n-r}{n}\frac{1}{d}$. D'où :

$$\frac{x_n}{n} \leq \frac{x_d}{d} - \frac{1}{n}\frac{r}{d} x_d + \frac{1}{n} x_r.$$

Comme $r \leq d$, $-\frac{r}{d} x_d \leq X_d$ (attention, x_d peut être négatif !). De plus, $x_r \leq X_d$. On en déduit que :

$$\frac{x_n}{n} \leq \frac{x_d}{d} + 2\frac{X_d}{n}.$$

3. Notons $\ell = \inf(E)$. Soit $\varepsilon > 0$. On peut trouver $d \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{x_d}{d} \leq \ell + \frac{\varepsilon}{2}$. Soit $n \geq d$. D'après la question précédente, on a

$$\frac{x_n}{n} \leq \frac{x_d}{d} + 2\frac{X_d}{n},$$

où $X_d = \max(|x_1|, \dots, |x_d|)$. La suite $\left(2\frac{X_d}{n}\right)_n$ tend vers 0 ; il existe donc $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq n$, $2\frac{X_d}{n} \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Alors, pour tout $n \geq \max(d, N)$, on a :

$$\frac{x_n}{n} \leq \ell + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \ell + \varepsilon.$$

De plus, on a $\frac{x_n}{n} \geq \ell$ car $\frac{x_n}{n}$ est un élément de E, minoré par ℓ. Ainsi,

$$\forall n \geq \max(d, N), |\frac{x_n}{n} - \ell| \leq \varepsilon.$$

On en déduit que la suite $(\frac{x_n}{n})$ tend vers ℓ.

3 Chemins auto-évitants dans $\mathbb{Z}^2$

1. On trouve de jolies illustrations sur la page Wikipedia : chemin auto-évitant.

2. On a $c_0 = 1$ et $c_1 = 4$. La seule restriction pour les chemins de longueur 2 est que le deuxième pas ne soit pas opposé au précédent. Donc $c_2 = 4 \times 3 = 12$. De même, étant donné un chemin quelconque de longueur 2, on peut le prolonger de 3 façons différentes en un chemin de longueur 3 (on ne peut pas revenir en le sommet d'origine). Donc $c_3 = 4 \times 3 \times 3 = 36$. Même raisonnement pour les chemins de longueur 4, mais il faut aussi retirer les 4 chemins qui reviennent au sommet d'origine en un cycle de longueur 4 ; il y a 8 tels chemins. Donc $c_4 = 36 \times 3 - 8 = 100$.

3. Notons $\mathscr{C}_n$ l'ensemble des chemins de longueur n. Un élément de $\mathscr{C}_n$ s'écrit donc $(s_0, \dots, s_n)$. Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$. On définit une application Φ de $\mathscr{C}_{n+p}$ dans $\mathscr{C}_n \times \mathscr{C}_p$ par

$$\Phi(s_0, \dots, s_{n+p}) = \Big((s_0, \dots, s_n), (s_0, s_{n+1} - s_n, s_{n+2} - s_n, \dots, s_{n+p} - s_n)\Big).$$

On a donc découpé un chemin auto-évitant en deux sous-chemins, et translaté le deuxième pour le faire démarrer à l'origine.

On vérifie que Φ est bien définie et qu'elle est injective. En effet, si $(s_0, \dots, s_{n+p})$ et $(s'_0, \dots, s'_{n+p})$, on a déjà $(s_0, \dots, s_n) = (s'_0, \dots, s'_n)$. Puis, pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, $s_{n+k} - s_n = s'_{n+k} - s'_n$, ce qui implique $s_{n+k} = s'_{n+k}$, puisqu'on sait déjà que $s_n = s'_n$. Ainsi

$$c_{n+p} \leq c_n c_p.$$

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Les chemins de longueur n dont les pas sont $(1,0)$ et $(0,1)$ sont auto-évitants. On en déduit que $c_n \geq 2^n$. On en déduit que la suite $(\dfrac{\ln c_n}{n})$ est minorée par $\ln 2$. Par la question précédente, elle vérifie la condition du lemme de Fekete, donc elle converge vers un réel $\geq \ln 2$. Alors, $\sqrt[n]{c_n} = \exp(\dfrac{\ln c_n}{n})$ converge vers un réel $\mu \geq 2$.

La majoration $\mu \leq 3$ vient de ce que, pour tout entier $n \geq 2$, $c_n \leq 4 \times 3^{n-1}$ (car un pas ne peut pas être égal à l'opposé du pas précédent). En passant à la racine n-ème et à la limite, on en déduit $\mu \leq 3$.

5. On a $c_n \sim c\mu^n n^\gamma$. Donc, $c_{n+1} \sim c\mu^{n+1}(n+1)^\gamma$. Par quotient d'équivalents :

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} \sim \frac{c\mu^{n+1}(n+1)^\gamma}{c\mu^n n^\gamma} = \mu(1 + \frac{1}{n})^\gamma \sim \mu.$$

Donc $\dfrac{c_{n+1}}{c_n}$ tend vers μ.

6. Étant donnés deux chemins auto-évitants de longueur n, on peut les concaténer (en opérant une translation du deuxième chemin pour qu'il démarre à la fin du premier) pour obtenir un chemin de longueur $2n$. Ce chemin ne sera pas nécessairement auto-évitant. La quantité $\dfrac{c_{2n}}{c_n^2}$ s'interprète comme la probabilité pour que la concaténation de deux chemins auto-évitants de longueur n, donne un chemin auto-évitant de longueur $2n$.

On a $c_{2n} \sim c\mu^{2n}(2n)^\gamma$ et $c_n^2 \sim c^2\mu^{2n}n^{2\gamma}$. Donc, par quotient d'équivalents :

$$\frac{c_{2n}}{c_n^2} \sim \frac{c\mu^{2n}(2n)^\gamma}{c^2\mu^{2n}n^{2\gamma}} = \frac{2^\gamma}{c}n^{-\gamma}.$$

7. La constante γ doit être positive ou nulle. Sinon l'équivalent précédent montrerait que $\dfrac{c_{2n}}{c_n^2}$ tend vers $+\infty$, ce qui est absurde (on sait que la fraction est inférieure à 1). Supposons que $\gamma > 0$. Alors, dans l'équivalent précédent, les suites tendent vers 0. D'après le cours, on peut passer au logarithme dans ces équivalents et on a donc :

$$\ln\left(\frac{c_{2n}}{c_n^2}\right) \sim \gamma \ln 2 - \ln c - \gamma \ln n \sim -\gamma \ln n.$$

On en déduit que

$$\gamma = \lim_n \frac{2\ln c_n - \ln c_{2n}}{\ln n}.$$

8. cf. Fekete.py