DM 08 - Fonction de Takagi – Reprise

1 Construction de la fonction de Takagi

1. RAS

2. RAS

3. Des élèves parlent de dilatation de facteur 2^n dans un sens et 2^{-n} dans un autre. Mais les deux dilatations horizontale et verticale se font avec un facteur 2^{-n} (on peut aussi parler de contraction de rapport 2^n).

4. Pour la 1-lipschitzianité, beaucoup se ramènent au segment $[0,1]$ en étudiant différents cas et concluent par 1-périodicité. Mais d'une part, ce n'est pas le plus rapide ; d'autre part, il n'est pas tout à fait évident qu'une fonction 1-périodique qui est 1-lipschitzienne sur $[0,1]$ est 1-lipschitzienne (cela revient à appliquer l'inégalité triangulaire).

5. RAS

6. RAS

7. RAS

2 Autour de la continuité de τ

8. Des inégalités douteuses ou des rédactions maladroites. D'une part, on utilise que $g_k(x) \leq \frac{1}{2^{k+1}}$ (et non seulement $\frac{1}{2^k}$). D'autre part, on raisonne dans un premier temps avec deux indices et on fait tendre un des deux indices vers l'infini (bien plus propre que d'écrire des inégalités sur des limites dont on ne montre pas si elles existent bien).

9. On peut utiliser directement qu'une somme de fonctions lipschitziennes/uniformément continues est lipschitzienne/uniformément continue.

10. On fixe d'abord ε et on adapte l'indice n à ce ε. Attention à la rédaction !

11. Bien traité en général.

12. Question un peu technique. Le but était de comprendre que τ n'était pas loin d'être lipschitzienne (le facteur logarithmique tend lentement vers $+\infty$).

13. Conséquence assez directe de la question précédente. La plupart des élèves qui l'ont traitée ont défini une fonction sur $]0,1]$ et montré par croissance comparée qu'elle se prolongeait en une application continue, puis ont utilisé le théorème des bornes atteintes. Une façon un peu différente de voir les choses est dans le corrigé. Dans tous les cas, le point crucial est la comparaison des croissance logarithmique et polynomiale.

14. Dans beaucoup de copies, la démonstration d'unicité est plus simple que celle du corrigé. Il est utilisé qu'une fonction vérifiant les trois conditions doit être bornée ; par récurrence finie avec la propriété de similarité, on obtient rapidement qu'une telle fonction doit être la fonction de Takagi. C'est très bien.

3 Non-dérivabilité de τ

15. Il n'y avait absolument pas besoin de montrer que (a_n) et (b_n) sont adjacentes pour montrer qu'elles convergent vers x. Il suffit d'écrire les inégalités dont on dispose avec la partie entière.

16. Une récurrence est peu pertinente quand on sait qu'on peut s'en sortir avec des inégalités. Différentes rédactions possibles.

17. RAS

18. RAS

19. Pour montrer la parité, utiliser des congruences modulo 2 est bien plus rapide qu'une récurrence.

20. Rédaction souvent confuse, avec de façon cachée des limites prises à la suite. Le résultat est faux si on ne suppose pas $x \in]a_n, b_n[$; cette hypothèse doit donc apparaître clairement dans la résolution.

21. RAS