# DS 4 de mathématiques

*Durée : 4 heures.* Les calculatrices et autres technologies sont interdites.

Si vous repérez une possible erreur d'énoncé, vous êtes invité(e) à venir le signaler.

## Exercice – Asymptotique d'une suite implicite

Pour tout $n \geq 2$, on définit une fonction polynomiale $f_n : x \mapsto x^{2n} - 2nx + 1$ sur $\mathbb{R}$.

1. Soit $n \geq 2$. Dresser le tableau des variations de $f_n$. Montrer que $f_n$ s'annule exactement deux fois sur $\mathbb{R}$ : une fois sur $]0,1[$, une fois sur $]1,+\infty[$.

Pour tout $n \geq 2$, on note $x_n$ l'unique point d'annulation de $f_n$ sur $]1,+\infty[$.

2. Montrer que si $u \in \mathbb{R}_+$ et $n \geq 1$, alors $(1+u)^{2n} \geq 1 + 2nu + n(2n-1)u^2$.
3. En déduire que $f_n(1+n^{-1/4}) \to +\infty$, quand $n \to +\infty$.
4. En déduire que $x_n \to 1$, quand $n \to +\infty$.
5. Déterminer un équivalent **simple** de $u_n = x_n - 1$.

## Problème – Suites équiréparties

Si $x$ est un réel, on rappelle qu'on note $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor \in [0,1[$ sa partie fractionnaire.
Si $(u_k)_{k\geq 1}$ est une suite de réels, si $A$ est une partie de $[0,1]$ et si $n \in \mathbb{N}^*$, on définit

$$\gamma(u,A,n) = \Big|\big\{k \in [\![1,n]\!] \mid \{u_k\} \in A\big\}\Big|.$$

La suite $(u_k)_{k\geq 1}$ est *équirépartie modulo* 1 si

$$\forall a < b \in [0,1], \frac{\gamma(u,[a,b],n)}{n} \to b-a, \text{ quand } n \to +\infty.$$

Concrètement, on demande que la proportion d'indices $k$ pour lesquels $\{u_k\} \in [a,b]$ converge vers $b-a$, pour tous $a<b$ dans $[0,1]$.

Ce problème se compose de 4 parties essentiellement indépendantes. Les critères d'équirépartition démontrés dans la partie 1 sont utilisés dans les autres parties.

## 1 – Critère de Weyl

On désigne par $\mathcal{E}$ l'ensemble des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. Soit $(u_k)_{k\geq 1}$ une suite de réels. On cherche à établir l'équivalence[1] entre les assertions suivantes :

i) La suite $(u_k)_{k\geq 1}$ est équirépartie modulo 1.

ii) Pour toute fonction $f \in \mathcal{E}$, $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\{u_k\}) \to \int_0^1 f(x)dx$, quand $n \to +\infty$.

iii) Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} e^{2i\pi p u_k} \to 0$, quand $n \to +\infty$.

1. **Sens** $ii) \implies i)$**.** On suppose $ii)$. Soient $a < b$ deux réels dans $]0,1[$. On note $\mathbb{1}_{[a,b]}$ la fonction indicatrice de $[a,b]$ valant 1 en les réels de $[a,b]$ et 0 en les autres.

   (a) Soit $\varepsilon > 0$. Définir deux fonctions $\phi$ et $\psi$ dans $\mathcal{E}$ telles que $\phi \leq \mathbb{1}_{[a,b]} \leq \psi$ sur $[0,1]$ et $\displaystyle\int_0^1 \psi(x)dx - \varepsilon \leq b - a \leq \int_0^1 \phi(x)dx + \varepsilon$.
   *Un dessin clair et bien commenté pourra tenir lieu de preuve.*

   (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \phi(\{u_k\}) \leq \gamma(u,[a,b],n) \leq \sum_{k=1}^{n} \psi(\{u_k\})$.

   (c) En déduire que $\displaystyle\frac{\gamma(u,[a,b],n)}{n} \to b - a$.

   En adaptant la démonstration dans le cas où $a = 0$ ou $b = 1$, on a ainsi établi $i)$.

2. **Sens** $i) \implies ii)$**.** On suppose $i)$. Soit $f \in \mathcal{E}$.

   (a) Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe $r \in \mathbb{N}^*$ tel que

   $$\forall i \in [\![0, r-1]\!], \forall x \in [i/r, (i+1)/r], |f(x) - f(i/r)| \leq \varepsilon.$$

   (b) Montrer que $\displaystyle\left|\int_0^1 f(x)dx - \frac{1}{r}\sum_{i=0}^{r-1} f(i/r)\right| \leq \varepsilon$.

   Si $n \in \mathbb{N}^*$ et $i \in [\![0, r-1]\!]$, on note $\gamma_{i,n} = \gamma(u, [i/r, (i+1)/r[, n)$.

   (c) Montrer que, si $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\left|\sum_{k=1}^{n} f(\{u_k\}) - \sum_{i=0}^{r-1} \gamma_{i,n} f(i/r)\right| \leq n\varepsilon$.

   (d) Montrer que $\displaystyle\frac{\gamma_{i,n}}{n} \to \frac{1}{r}$ pour tout $i \in [\![0, r-1]\!]$.

[1] On appelle habituellement *critère de Weyl* l'équivalence entre $i)$ et $iii)$.

(e) Conclure.

3. Montrer l'implication $ii) \implies iii)$.

Dans la suite du problème, **on admet** l'implication $iii) \implies i)$ et donc l'équivalence entre $i)$, $ii)$ et $iii)$.

## 2 – Loi de Benford pour $2^n$

Dans cette partie, log désigne le **logarithme décimal**.

4. Soit $\alpha$ un réel. Montrer que la suite $(k\alpha)_{k\geq 1}$ est équirépartie modulo 1 ssi $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

5. Montrer que $\log 2$ est irrationnel.

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note $a_k$ le premier chiffre de $2^k$ dans son écriture en base 10.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $j \in [\![1, 9]\!]$, on définit $\tau_j(n) = \dfrac{|\{k \in [\![1, n]\!] \mid a_k = j\}|}{n}$.

6. Soient $k \in \mathbb{N}^*$ et $j \in [\![1, 9]\!]$. Montrer que $a_k = j$ ssi $\{k \log 2\} \in [\log j, \log(j + 1)[$.

7. En déduire que pour tout $j \in [\![1, 9]\!]$, $(\tau_j(n))_{n\geq 1}$ converge et préciser sa limite.

## 3 – Équirépartition et densité

On dit qu'une suite $(u_k)_{k\geq 1}$ est dense modulo 1 si $\big\{\{u_k\}, k \in \mathbb{N}^*\big\}$ est dense dans $[0, 1]$.

8. Montrer que si $(u_k)_{k\geq 1}$ est équirépartie modulo 1, alors elle est dense modulo 1.

9. **Étude de $\cos n$.**

   (a) Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \cos^2(k)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Que vaut $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \cos^2(k)$ ?

   (b) En déduire que $(\cos k)_{k\geq 1}$ n'est pas équirépartie modulo 1.

10. **Étude de $\ln n$.**

   (a) Soient $a < b$ deux réels tels que $0 \leq a < b \leq 1$. Montrer que si $n$ est un entier suffisamment grand, alors il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $e^{a+n} \leq k < e^{b+n}$.

   (b) En déduire que la suite $(\ln k)_{k\geq 1}$ est dense modulo 1.

   (c) Soient $F : [1, +\infty[ \to \mathbb{C}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} F(k) = \frac{1}{n} \int_1^n F(x)dx + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \left(x - k - \frac{1}{2}\right) F'(x)dx + \frac{F(1) + F(n)}{2n}.$$

On considère désormais la fonction $F : x \mapsto e^{2i\pi \ln x}$.

(d) Montrer que $\displaystyle \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} F(k) = \frac{1}{n}\int_1^n F(x)dx + o(1)$, quand $n \to +\infty$.

(e) Calculer $\displaystyle \int_1^n F(x)dx$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.
*On pourra procéder par intégration par parties.*

(f) En déduire que $(\ln k)_{k\geq 1}$ n'est pas équirépartie modulo 1.

## 4 – Théorème de Weyl

Le but de cette partie est de démontrer le **théorème de Weyl** qui affirme que pour tout polynôme non constant $P = \displaystyle\sum_{j=0}^{d} a_j X^j$ à coefficients réels et tel que $a_d \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, la suite $\big(P(n)\big)_{n\geq 1}$ est équirépartie modulo 1.
Soit $(z_n)_{n\geq 1}$ une suite complexe telle que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, |z_n| \leq 1$. Soit $N \in \mathbb{N}^*$ et $H \in [\![1, N]\!]$.

11. Montrer que $\displaystyle \Big|\sum_{n=1}^{N} z_n - \frac{1}{H}\sum_{n=1}^{N}\sum_{h=1}^{H} z_{n+h}\Big| \leq H + 1.$

12. Montrer que $\displaystyle \Big|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} z_n\Big| \leq \frac{1}{H\sqrt{N}}\Big(\sum_{n=1}^{N}\Big|\sum_{h=1}^{H} z_{n+h}\Big|^2\Big)^{1/2} + \frac{H+1}{N}.$

13. Après avoir remarqué que

$$\sum_{n=1}^{N}\Big|\sum_{h=1}^{H} z_{n+h}\Big|^2 = \sum_{n=1}^{N}\sum_{1\leq h,k\leq H} z_{n+h}\overline{z_{n+k}} = \sum_{n=1}^{N}\sum_{h=1}^{H}|z_{n+h}|^2 + 2\mathrm{Re}\Big(\sum_{n=1}^{N}\sum_{1\leq h<k\leq H} z_{n+h}\overline{z_{n+k}}\Big),$$

montrer que $\displaystyle \sum_{n=1}^{N}\Big|\sum_{h=1}^{H} z_{n+h}\Big|^2 \leq NH + 2H\sum_{h=1}^{H}\Big|\sum_{n=1}^{N} z_{n+h}\overline{z_n}\Big| + H^2(H+1).$

14. En déduire l'*inégalité de van der Corput* :

$$\Big|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} z_n\Big| \leq \sqrt{2}\Big(\frac{1}{H}\sum_{h=1}^{H}\Big|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} z_{n+h}\overline{z_n}\Big|\Big)^{1/2} + \frac{1}{\sqrt{H}} + \sqrt{\frac{H+1}{N}} + \frac{H+1}{N}.$$

15. En déduire que si une suite réelle $(u_n)_{n\geq 1}$ est telle que, pour tout $h \in \mathbb{N}^*$, la suite $(u_{n+h} - u_n)_{n\geq 1}$ est équirépartie modulo 1, alors la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est équirépartie modulo 1.

16. Démontrer le théorème de Weyl.