DS 4 de mathématiques – Corrigé

Exercice – Asymptotique d'une suite implicite

1. La fonction f_n est polynomiale donc dérivable, de dérivée $f'_n : x \mapsto 2n(x^{2n-1} - 1)$. Comme $2n - 1$ est impair, $x^{2n-1} \geq 1 \iff x \geq 1$. Donc, f'_n est négative si $x \leq 1$ et positive si $x \geq 1$. De plus, elle ne s'annule qu'en $x = 1$.

On en déduit que f_n est strictement décroissante sur $] -\infty, 1]$ et strictement croissante sur $[1, +\infty[$. En $\pm\infty$, f_n tend vers $+\infty$ car $f_n(x) \sim x^{2n}$ en les infinis ; en 1, on calcule $f_n(1) = 2 - 2n$.

Comme $f_n \rightarrow +\infty$ en $-\infty$ et que $f_n(1) < 0$, f_n s'annule sur $] -\infty, 1]$ par le théorème des valeurs intermédiaires (étendu aux bornes) ; elle s'y annule une unique fois par stricte décroissance. Comme de plus, $f_n(0) = 1$, le point d'annulation est dans $]0, 1[$. On montre de même que f_n s'annule une unique fois sur $]1, +\infty[$.

2. Par la formule du binôme de Newton, $(1 + u)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} u^k$. Comme tous les termes sont positifs et que $2n \geq 2$, la somme est supérieure à la somme des 3 premiers termes. D'où :

$$(1 + u)^{2n} \geq 1 + 2nu + \frac{2n(2n-1)}{2}u^2,$$

ce qu'on voulait.

3. On a

$$\begin{aligned} f_n(1 + n^{-1/4}) &= (1 + n^{-1/4})^{2n} - 2n - 2n \times n^{-1/4} + 1 \\ &\geq 1 + 2n \times n^{-1/4} + n(2n-1) \times n^{-1/2} - 2n - 2n \times n^{-1/4} + 1 \\ &\geq 2 + n^{1/2}(2n-1) - 2n. \end{aligned}$$

On a $n^{1/2}(2n-1) \sim 2n^{3/2}$ et les autres termes sont négligeables devant $n^{3/2}$. Donc, $f_n(1 + n^{-1/4}) \sim n^{3/2}$; en particulier, $f_n(1 + n^{-1/4}) \rightarrow +\infty$.

4. Comme $f_n(1 + n^{-1/4}) \rightarrow +\infty$, $f_n(1 + n^{-1/4}) > 0$ pour n assez grand. Donc, d'après les variations de f_n , pour n assez grand, on a $1 < x_n < 1 + n^{-1/4}$. Par théorème d'encadrement, $x_n \rightarrow 1$.
5. Par définition, on a pour tout $n \geq 2$, $(1 + u_n)^{2n} - 2n(1 + u_n) + 1 = 0$. On ajoute $2n(1 + u_n) - 1$ et on prend le ln des deux côtés pour obtenir l'égalité

$$2n \ln(1 + u_n) = \ln(2n(1 + u_n) - 1).$$

Comme $x_n \rightarrow 1$, $u_n \rightarrow 0$. Donc, $\ln(1 + u_n) \sim u_n$ et $2n \ln(1 + u_n) \sim 2nu_n$. De plus, $2n(1 + u_n) - 1 \sim 2n$ car $u_n \rightarrow 0$ est négligeable devant 1. On sait qu'on peut passer au logarithme dans les équivalents de quantités tendant vers 0 ou $+\infty$; donc $\ln(2n(1 + u_n) - 1) \sim \ln(2n) = \ln n + \ln 2 \sim \ln n$. On en déduit que $2nu_n \sim \ln n$ et donc $u_n \sim \frac{\ln n}{2n}$.

Problème – Suites équiréparties

1 – Critère de Weyl

1. (a) On fixe $\delta > 0$ tel que $0 < a - \delta < a < a + \delta < b - \delta < b < b + \delta < 1$ et $\delta < \varepsilon$ (il suffit de prendre $\delta \in]0, \min(\varepsilon, a, 1 - b, (b - a)/2)[$).

On définit ϕ comme la fonction valant 0 sur $[0, a]$ et $[b, 1]$, 1 sur $[a + \delta, b - \delta]$ et qui est affine sur $[a, a + \delta]$ et $[b - \delta, b]$.

On définit ψ comme la fonction valant 0 sur $[0, a - \delta]$ et $[b + \delta, 1]$, 1 sur $[a, b]$ et qui est affine sur $[a - \delta, a]$ et $[b, b + \delta]$. *cf. dessin.*

On a bien $\phi \leq \mathbb{1}_{[a,b]} \leq \psi$ sur $[0, 1]$. De plus, les intégrales se calculent immédiatement

: on a $\int_0^1 \psi(x) dx = b - a + 2\delta/2 = b - a + \delta$ et $\int_0^1 \phi(x) dx = b - a - 2\delta/2 = b - a - \delta$.

Comme $\delta < \varepsilon$, les inégalités de l'énoncé sont satisfaites.

- (b) Comme $\phi \leq \mathbb{1}_{[a,b]}$, $\phi(x) \leq 0$ si x est hors de $[a, b]$ et $\phi(x) \leq x$ si $x \in [a, b]$. Donc, si $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^n \phi(\{u_k\}) \leq \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ \{u_k\} \in [a,b]}} 1 = \gamma(u, [a, b], n).$$

De même, $\psi(x) \geq 1$ si $x \in [a, b]$ et donc :

$$\sum_{k=1}^n \psi(\{u_k\}) \geq \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ \{u_k\} \in [a,b]}} 1 = \gamma(u, [a, b], n).$$

- (c) Comme ϕ et ψ sont dans $\mathcal{E}$ et qu'on a supposé *ii*), on a $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \phi(\{u_k\}) \rightarrow$

$$\int_0^1 \phi(x) dx \geq b - a - \varepsilon \text{ et de même } \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \psi(\{u_k\}) \rightarrow \int_0^1 \psi(x) dx \leq b - a + \varepsilon.$$

On en déduit que pour n assez grand, on a

$$-2\varepsilon \leq \frac{\gamma(u, [a, b], n)}{n} - (b - a) \leq 2\varepsilon.$$

Comme ε est quelconque, ceci montre que $\frac{\gamma(u, [a, b], n)}{n} \rightarrow b - a$.

2. (a) Comme f est continue sur $[0, 1]$, elle est uniformément continue par le théorème de Heine. Il existe donc $\delta > 0$ tel que si $x, x' \in [0, 1]$ sont tels que $|x - x'| \leq \delta$, alors $|f(x) - f(x')| \leq \varepsilon$. On fixe $r \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{1}{r} \leq \delta$. Alors, si $i \in \llbracket 0, r-1 \rrbracket$ et si $x \in [i/r, (i+1)/r]$, $|x - i/r| \leq \frac{1}{r} \leq \delta$. D'où la majoration $|f(x) - f(i/r)| \leq \varepsilon$, pour un tel x .
- (b) Par relation de Chasles,

$$\int_0^1 f(x)dx = \sum_{i=0}^{r-1} \int_{i/r}^{(i+1)/r} f(x)dx.$$

Donc,

$$\begin{aligned} \left| \int_0^1 f(x)dx - \frac{1}{r} \sum_{i=0}^{r-1} f(i/r) \right| &= \left| \sum_{i=0}^{r-1} \int_{i/r}^{(i+1)/r} (f(x) - f(i/r))dx \right| \\ &\leq \sum_{i=0}^{r-1} \int_{i/r}^{(i+1)/r} |f(x) - f(i/r)|dx \\ &\leq r \times \frac{\varepsilon}{r} \\ &\leq \varepsilon. \end{aligned}$$

- (c) Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on note i_k l'entier (ou un entier) entre 0 et $r-1$ tel que $\{u_k\} \in [i_k/r, (i_k+1)/r[$. On a alors :

$$\sum_{k=1}^n f(\{u_k\}) = \sum_{i=0}^{r-1} \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ i_k=i}} f(\{u_k\}).$$

Par définition, le nombre d'indices $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tels que $i_k = i$ est $\gamma_{i,n}$. Pour un tel indice k , on a $|f(\{u_k\}) - f(i/r)| \leq \varepsilon$. Par inégalité triangulaire, on a donc :

$$\left| \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ i_k=i}} f(\{u_k\}) - \gamma_{i,n} f(i/r) \right| \leq \gamma_{i,n} \varepsilon.$$

En appliquant de nouveau une inégalité triangulaire, on en déduit que

$$\left| \sum_{k=1}^n f(\{u_k\}) - \sum_{i=0}^{r-1} \gamma_{i,n} f(i/r) \right| \leq \left(\sum_{i=0}^{r-1} \gamma_{i,n} \right) \varepsilon = n\varepsilon.$$

- (d) Considérons $i \in \llbracket 0, r-1 \rrbracket$. Soit $\delta \in]0, 1/r[$. On a

$$\gamma(u, [i/r, (i+1)/r - \delta], n) \leq \gamma_{i,n} \leq \gamma(u, [i/r, (i+1)/r, n]),$$

car $[i/r, (i+1)/r - \delta] \subset [i/r, (i+1)/r] \subset [i/r, (i+1)/r]$. Quand on divise par n et qu'on prend la limite en $+\infty$, le membre de gauche tend vers $1/r - \delta$, celui de droite vers $1/r$; on en déduit que pour n assez grand, $1/r - 2\delta \leq \frac{\gamma_{i,n}}{n} \leq 1/r + \delta$.

Comme δ est arbitrairement petit, $\frac{\gamma_{i,n}}{n} \rightarrow 1/r$.

(e) On sait que $\left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(\{u_k\}) - \sum_{i=0}^{r-1} \frac{\gamma_{i,n}}{n} f(i/r) \right| \leq \varepsilon$. Par opérations élémentaires, $\sum_{i=0}^{r-1} \frac{\gamma_{i,n}}{n} f(i/r) \rightarrow \frac{1}{r} \sum_{i=0}^{r-1} f(i/r)$, donc ces deux quantités sont ε -proches pour n assez grand. Enfin, on sait que $\left| \int_0^1 f(x) dx - \frac{1}{r} \sum_{i=0}^{r-1} f(i/r) \right| \leq \varepsilon$. Donc, par inégalité triangulaire, pour n assez grand :

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(\{u_k\}) - \int_0^1 f(x) dx \right| \leq 3\varepsilon.$$

Comme ε est quelconque, ceci montre que $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(\{u_k\}) \rightarrow \int_0^1 f(x) dx$.

3. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On note $f_p : x \mapsto e^{2i\pi px}$. C'est une application continue, qu'on peut définir sur $[0, 1]$. Par *ii*), on a donc :

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n e^{2i\pi p u_k} &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n e^{2i\pi p \{u_k\}} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \cos(2\pi p \{u_k\}) + \frac{i}{n} \sum_{k=1}^n \sin(2\pi p \{u_k\}) \\ &\rightarrow \int_0^1 \cos(2\pi p x) dx + i \int_0^1 \sin(2\pi p x) dx = \int_0^1 f_p(x) dx. \end{aligned}$$

Or, $\int_0^1 f_p(x) dx = \left[\frac{e^{2i\pi p x}}{2i\pi p} \right]_{x=0}^{x=1} = 0$. Ceci conclut le point *iii*).

2 – Loi de Benford pour 2^n

4. On utilise le critère de Weyl. Supposons $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$; soit $p \in \mathbb{N}^*$. Alors,

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n e^{2i\pi p k \alpha} = \frac{e^{2i\pi p \alpha}}{n} \frac{1 - e^{2i\pi p n \alpha}}{1 - e^{2i\pi p \alpha}}.$$

Le module de cette expression est majoré par $\frac{2}{n|1 - e^{2i\pi p\alpha}|}$, qui tend vers 0, donc

$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n e^{2i\pi pk\alpha} \rightarrow 0$. Donc, la suite $(k\alpha)$ est équirépartie dans ce cas.

Si $\alpha \in \mathbb{Q}$, on considère un $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $p\alpha \in \mathbb{Z}$. Alors, $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n e^{2i\pi pk\alpha} = 1$, de sorte que $(k\alpha)$ n'est pas équirépartie modulo 1 (*on peut bien sûr démontrer ce sens directement.*)

5. On raisonne par l'absurde. Si $\log 2$ était rationnel, on pourrait l'écrire $\log 2 = \frac{a}{b}$ avec $a, b \in \mathbb{N}^*$. On aurait donc $b \ln 2 = a \ln 10$ et donc $2^b = 10^a$: c'est absurde car 5 divise le membre de droite mais pas celui de gauche.

6. Le premier chiffre de l'écriture d'un entier N en base 10 est l'unique $j \in \llbracket 1, 9 \rrbracket$ tel que N appartient à $[10^c j, 10^c(j+1)[$, pour un certain entier naturel c (*le nombre de chiffres de N moins un*). En passant au $\log$, c'est l'unique j tel que $\log N \in [c + \log j, c + \log(j+1)[$, pour un certain $c \in \mathbb{N}$; c'est donc l'unique j tel que $\{\log N\} \in [\log j, \log(j+1)[$. On applique à $N = 2^k$, de sorte que $\log N = k \log 2$.

7. D'après la question précédente, $\tau_j(n) = \frac{\gamma((k \log 2)_k, [\log j, \log(j+1)[, n])}{n}$. On sait que la suite $(k \log 2)$ est équirépartie modulo 1 ; comme dans la question 2.d), on peut montrer que la borne ouverte ne change rien et donc $\tau_j(n) \rightarrow \log(j+1) - \log j = \log\left(1 + \frac{1}{j}\right)$.

On peut aussi remarquer que l'égalité $\{k \log 2\} = \log(j+1)$ a lieu exactement quand 2^k est de la forme $10^c(j+1)$; comme le membre de droite est divisible par 5 dès que $c \geq 1$, cela ne se produit que pour $k = 1, 2, 3$ et ne modifie pas la limite.

3 – Équirépartition et densité

8. Soient $a < b$ dans $[0, 1]$. Comme $\gamma(u, [a, b], n)$ est équivalent à $n(b-a)$ quand $n \rightarrow +\infty$, l'ensemble $\{k \in \llbracket 1, n \rrbracket \mid \{u_k\} \in [a, b]\}$ est non vide si n est assez grand. Donc, $(u_k)_{k \geq 1}$ est dense modulo 1.

9. **Étude de $\cos n$.**

(a) On linéarise :

$$\sum_{k=1}^n \cos^2(k) = \sum_{k=1}^n \frac{\cos(2k) + 1}{2} = \frac{n}{2} + \sum_{k=1}^n \cos(2k).$$

Pour la somme des $\cos(2k)$, on calcule

$$\sum_{k=1}^n e^{2ik} = e^{2i} \frac{1 - e^{2in}}{1 - e^{2i}} = e^{(n+1)i} \frac{\sin n}{\sin 1}.$$

Donc, $\sum_{k=1}^n \cos^2(k) = \frac{n}{2} + \cos(n+1) \frac{\sin n}{\sin 1}$. Donc, $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \cos^2 k \rightarrow \frac{1}{2}$.

- (b) Comme $\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3} \neq \frac{1}{2}$, $(\sin k)$ n'est pas équirépartie modulo 1 (on utilise le point *ii*) du critère de Weyl).

10. Étude de $\ln n$.

- (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $e^{b+n} - e^{a+n} = e^n(e^b - e^a)$. Donc, cette quantité tend vers $+\infty$. En particulier, pour n assez grand, on a $e^{b+n} - e^{a+n} > 1$. Pour ces n , il existe donc un entier k dans $[e^{a+n}, e^{b+n}[$.
- (b) Soient $a < b \in [0, 1]$. On choisit n de telle sorte qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $e^{a+n} \leq k < e^{b+n}$. Alors, $a + n \leq \ln k < b + n$ et donc, $\{\ln k\} \in [a, b[$. Donc, la suite $(\ln k)$ est dense.
- (c) Par intégration par parties, on a :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \left(x - k - \frac{1}{2}\right) F'(x) dx &= \sum_{k=1}^{n-1} [(x - k - 1/2)F(x)]_{x=k}^{x=k+1} - \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} F(x) dx \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{F(k+1) + F(k)}{2} - \int_1^n F(x) dx \\ &= \sum_{k=1}^n F(k) - \frac{F(n) + F(1)}{2} - \int_1^n F(x) dx. \end{aligned}$$

Tous les termes dans la somme viennent en double sauf les extrêmes.

En rassemblant les termes au bon endroit et en divisant par n , on obtient l'égalité souhaitée.

- (d) D'après la question précédente, on a

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n F(k) - \frac{1}{n} \int_1^n F(x) dx = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \left(x - k - \frac{1}{2}\right) F'(x) dx + \frac{F(1) + F(n)}{2n}.$$

Il suffit donc de montrer que les deux termes à droite tendent vers 0. Comme F est à valeurs dans $\mathcal{U}$, elle est bornée. Donc, $\frac{F(1) + F(n)}{2n} \rightarrow 0$. De plus, la

dérivée de F est $F'(x) = \frac{2i\pi}{x} e^{2i\pi \ln x}$. Si $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ et $x \in [k, k+1]$, on a donc :

$$\left| \left(x - k - \frac{1}{2} \right) F'(x) \right| \leq \frac{2\pi|x - k - 1/2|}{x} \leq \frac{\pi}{2x}.$$

Donc, par inégalité triangulaire (sur les sommes et les intégrales),

$$\left| \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \left(x - k - \frac{1}{2} \right) F'(x) dx \right| \leq \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{\pi}{2x} dx = \frac{\pi}{2} \ln n.$$

Comme $\ln n = o(n)$, le terme $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \left(x - k - \frac{1}{2} \right) F'(x) dx$ tend aussi vers

$$0. \text{ Donc, } \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n F(k) = \frac{1}{n} \int_1^n F(x) dx + o(1).$$

(e) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} \int_1^n F(x) dx &= \int_1^n 1 \times e^{2i\pi \ln x} dx \\ &= [x e^{2i\pi \ln x}]_{x=1}^{x=n} - \int_1^n x \times \frac{2i\pi}{x} e^{2i\pi \ln x} dx \\ &= n e^{2i\pi \ln n} - 1 - 2i\pi \int_1^n F(x) dx. \end{aligned}$$

$$\text{Donc, } \int_1^n F(x) dx = \frac{n e^{2i\pi \ln n} - 1}{1 + 2i\pi}.$$

(f) Avec les deux questions précédentes, on a :

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n F(k) = \frac{e^{2i\pi \ln n}}{2i\pi + 1} + o(1).$$

Le terme $\frac{e^{2i\pi \ln n}}{2i\pi + 1}$ ne tend pas vers 0 car il est de module constant égal à $\frac{1}{\sqrt{1 + 4\pi^2}}$ (on montre sans trop de problème qu'il ne converge pas du tout, mais ce n'est pas nécessaire.) Donc, $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n F(k)$ ne converge pas vers 0. Par le critère de Weyl, avec $p = 1$, on en déduit que $(\ln k)$ n'est pas équirépartie modulo 1.

4 – Théorème de Weyl

11. Dans la somme $\sum_{n=1}^N \sum_{h=1}^H z_{n+h}$, on a (en utilisant que $N \geq H$) :

- 1 fois le terme z_2 ;
- 2 fois le terme z_3 ;
- ...
- $H - 1$ fois le terme z_H ;
- H fois tous les termes de z_{H+1} à z_{N+1} ;
- $H - 1$ fois le terme z_{N+2} ;
- ...
- 1 fois le terme z_{N+H} .

Donc, $H \sum_{n=1}^N z_n - \sum_{n=1}^N \sum_{h=1}^H z_{n+h} = \sum_{k=1}^{H-1} k z_{k+1} + \sum_{k=1}^{H-1} k z_{N+H+1-k}$. Par inégalité triangulaire,

$$\left| H \sum_{n=1}^N z_n - \sum_{n=1}^N \sum_{h=1}^H z_{n+h} \right| \leq \sum_{k=1}^{H-1} k |z_{k+1}| + \sum_{k=1}^{H-1} k |z_{N+H+1-k}| \leq 2 \sum_{k=1}^{H-1} k = H(H-1).$$

On divise par H pour obtenir l'inégalité annoncée.

12. On utilise une inégalité triangulaire et l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=1}^N \sum_{h=1}^H z_{n+h} \right|^2 &\leq \sum_{n=1}^N \left(1 \times \left| \sum_{h=1}^H z_{n+h} \right| \right) \\ &\leq \sum_{n=1}^N 1^2 \times \sum_{n=1}^N \left| \sum_{h=1}^H z_{n+h} \right|^2 \\ &\leq N \sum_{n=1}^N \left| \sum_{h=1}^H z_{n+h} \right|^2. \end{aligned}$$

Avec la question précédente et une inégalité triangulaire, on a :

$$\left| \sum_{n=1}^N z_n \right| \leq \frac{1}{H} \left| \sum_{n=1}^N \sum_{h=1}^H z_{n+h} \right| + H + 1.$$

On prend la racine carrée dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz précédente et on divise par N pour obtenir l'inégalité

$$\left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N z_n \right| \leq \frac{1}{H\sqrt{N}} \left(\sum_{n=1}^N \left| \sum_{h=1}^H z_{n+h} \right|^2 \right)^{1/2} + \frac{H+1}{N}.$$

13. La *remarque* vient de ce que :

$$\sum_{n=1}^N \left| \sum_{h=1}^H z_{n+h} \right|^2 = \sum_{n=1}^N \left(\sum_{h=1}^H z_{n+h} \right) \overline{\left(\sum_{k=1}^H z_{n+k} \right)} = \sum_{n=1}^N \sum_{1 \leq h, k \leq H} z_{n+h} \overline{z_{n+k}}.$$

Puis on découpe la somme sur un carré en la somme sur un diagonale et la somme sur deux triangles. On rassemble les termes sur les triangles en disant que $z\bar{w} + w\bar{z} = 2\text{Re}(z\bar{w})$.

La somme $\sum_{n=1}^N \sum_{h=1}^H |z_{n+h}|^2$ est majorée par NH car les z_i sont de module ≤ 1 .

On peut décomposer $\sum_{n=1}^N \sum_{1 \leq h < k \leq H} z_{n+h} \overline{z_{n+k}}$ en la somme de $\sum_{n=1}^N \sum_{1 \leq h < k \leq H} z_{n+h} \overline{z_n}$ et $\sum_{n=1}^N \sum_{1 \leq h < k \leq H} z_{n+h} (\overline{z_{n+k}} - \overline{z_n})$. Dans la première somme k apparaît au plus H fois et

on peut donc majorer le module de la première somme par $H \sum_{h=1}^H \left| \sum_{n=1}^N z_{n+h} \overline{z_n} \right|$ par une inégalité triangulaire. Il reste à se convaincre que la deuxième somme a un module majorée par $H^2(H+1)$ (XXX : à écrire : on se ramène à la question 11 ou on procède de façon analogue). En majorant la partie réelle par un module et en utilisant une inégalité triangulaire, on obtient l'inégalité annoncée.

14. Avec les deux questions précédentes, on a :

$$\left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N z_n \right| \leq \frac{1}{H\sqrt{N}} \left(NH + 2H \sum_{h=1}^H \left| \sum_{n=1}^N z_{n+h} \overline{z_n} \right| + H^2(H+1) \right)^{1/2} + \frac{H+1}{N}.$$

Or, si a, b et c sont des réels positifs, $\sqrt{a+b+c} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}$ (ce qu'on voit en prenant les carrés des deux côtés). Donc,

$$\left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N z_n \right| \leq \frac{1}{H\sqrt{N}} \left(\sqrt{NH} + \sqrt{2H} \left(\sum_{h=1}^H \left| \sum_{n=1}^N z_{n+h} \overline{z_n} \right| \right)^{1/2} + H\sqrt{H+1} \right) + \frac{H+1}{N}.$$

Après simplifications, on a l'inégalité annoncée.

15. On considère une suite (u_n) telle que $(u_{n+h} - u_n)_n$ est équirépartie modulo 1 pour tout $h \geq 1$. On va utiliser le critère de Weyl pour montrer que (u_n) est équirépartie modulo 1.

Soit $p \geq 1$. On pose $z_n = e^{2i\pi p u_n}$ pour tout n . Soit $\varepsilon > 0$. On considère $H > 0$ suffisamment grand tel que $\frac{1}{\sqrt{H}} \leq \varepsilon$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on remarque que $z_{n+h} \overline{z_n} =$

$e^{2i\pi(u_{n+h}-u_n)}$. Donc, par le critère de Weyl, à h fixé, on a $\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N z_{n+h} \overline{z_n} \rightarrow 0$, quand $N \rightarrow +\infty$. Pour chacun de ces h , ces sommes sont en module inférieur à ε^2 si N est assez grand. Pour N assez grand, toutes ces sommes auront module inférieur à ε^2 pour $h \in \llbracket 1, H \rrbracket$ (nombre fini de conditions). De plus, toujours pour N assez grand, les deux quantités $\sqrt{\frac{H+1}{N}}$ et $\frac{H+1}{N}$ sont inférieures à ε . Finalement, pour N assez grand,

$$\left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N z_n \right| \leq \sqrt{2} \left(\frac{1}{H} \sum_{h=1}^H \varepsilon^2 \right)^{1/2} + \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = (3 + \sqrt{2})\varepsilon.$$

Comme ε est quelconque, ceci montre que $\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N z_n \rightarrow 0$, quand $N \rightarrow +\infty$. Par le critère de Weyl, (u_n) est équirépartie modulo 1.

16. On procède par récurrence sur le degré du polynôme. On note $\mathcal{P}(d)$ la propriété affirmant que l'énoncé est vraie pour un polynôme de degré d .

- Pour $d = 1$, on considère un polynôme $P = aX + b$, où $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Le terme constant b ne modifie pas la conclusion du calcul fait à la question 4 : la suite $(P(n))$ est équirépartie modulo 1 dans ce cas.
- On suppose $\mathcal{P}(d)$ vraie pour un $d \geq 1$. Soit P de degré $d + 1$ dont le coefficient dominant est dans $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Soit $h \geq 1$ un entier. Si on note $P = a_{d+1}X^{d+1} + a_dX^d +$ autres termes de degré $\leq d - 1$, alors $P(X + h) - P(X)$ s'écrit $a_{d+1}(X^{d+1} + (d + 1)hX^d) + a_dX^d - a_{d+1}X^{d+1} - a_dX^d +$ d'autres termes de degré $\leq d - 1$. Ainsi, $P(X + h) - P(X)$ est de la forme $a_{d+1}(d + 1)hX^d +$ d'autres termes de degré $\leq d - 1$; c'est donc un polynôme de degré d et de coefficient dominant $(d + 1)ha_{d+1} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ car $(d + 1)$ et h sont des entiers. L'hypothèse de récurrence s'applique à un tel polynôme, donc la suite $(P(n+h) - P(n))_{n \geq 1}$ est équirépartie modulo 1, pour tout $h \geq 1$. Par le lemme de van der Corput, $(P(n))_n$ est équirépartie modulo 1, ce qui conclut la récurrence.