Limites, continuité

1 Limites - Continuité en un point

Exercice 1. ♣ – ●○○ *Calcul de limites*
Étudier les limites suivantes :

1. $\dfrac{\sin^2(\frac{1}{x})}{x}$ en 0 ;
2. $\dfrac{\lfloor x^2 \rfloor}{(\lfloor x \rfloor)^2}$ en $+\infty$;
3. $\dfrac{\sin^2 x - \sin^2 a}{x^2 - a^2}$ en a ;
4. $\dfrac{\sin\sqrt{x}}{\ln x}$ en 0^+ ;
5. $\cos(x^2)$ en $+\infty$;
6. $\sqrt{x}\left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}\right)$ en $+\infty$;
7. $x\left\lfloor \dfrac{1}{x} \right\rfloor$ en $+\infty$;
8. $x\left\lfloor \dfrac{1}{x} \right\rfloor$ en 0 ;
9. $\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x$ en $+\infty$;
10. $\dfrac{1}{1-x} - \dfrac{2}{1-x^2}$ en 1 ;
11. $\sqrt{x^2+2x} - x$ en $+\infty$;
12. $\ln x \ln(\ln x)$ en 1.

Exercice 2. ●○○ *Prolongements par continuité*
Déterminer l'ensemble de définition et discuter des prolongements par continuité des fonctions suivantes :

1. $x \mapsto e^{-1/x^2}$;
2. $x \mapsto \dfrac{x \ln x}{x-1}$;
3. $x \mapsto \dfrac{x^2-1}{|x-1|}$;
4. $x \mapsto \sin(x)\sin(1/x)$.

Exercice 3. ●○○ *Avec partie entière*
Étudier les limites à gauche et à droite en 0 des fonctions suivantes :

1. $x \mapsto \left\lfloor \dfrac{1}{x} \right\rfloor$;
2. $x \mapsto x\left\lfloor \dfrac{1}{x} \right\rfloor$;
3. $x \mapsto x^2\left\lfloor \dfrac{1}{x} \right\rfloor$.

Exercice 4. ♢ – ●◐○ *Des équations fonctionnelles*

1. Déterminer les applications continues $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, f(x+y) = f(x) + f(y).$$

2. Déterminer les applications continues $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ telles que :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}_+^*, f(xy) = f(x) + f(y).$$

3. Déterminer les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, continues en 0 et en 1, telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(x^2).$$

EXERCICE 5. ●○○ *Limites en* 0 *de* f *et* $f \circ \sin$
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. Montrer que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \ell$ si et seulement si $\lim\limits_{x\to 0} f(\sin x) = \ell$.

EXERCICE 6. ♣ – ●◐○ $f(Ax) \leq Bf(x)$
Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ telle que f est continue en 0 et telle que :

$$\exists A > 1, \exists B > 0 : \forall x \in \mathbb{R}_+, f(Ax) \leq Bf(x).$$

Montrer que f est bornée sur tout intervalle borné.

EXERCICE 7. ♢ – ●◐○ *Monotonies et continuité*
Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ une fonction croissante telle que $x \mapsto \dfrac{f(x)}{x}$ est décroissante.
Montrer que f est continue.

EXERCICE 8. ●◐○ $\lim\limits_{x\to 0}\left(f(x) + \dfrac{1}{f(x)}\right) = 2$
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ une fonction telle que $\lim\limits_{x\to 0}\left(f(x) + \dfrac{1}{f(x)}\right) = 2$. Montrer que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$.

EXERCICE 9. ♣/♢ – ●●○ *Fonction à croissance lente*
Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ croissante telle que $\lim\limits_{x\to +\infty}\big(f(x+1) - f(x)\big) = 0$. Montrer que $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$.

EXERCICE 10. ♣ – ●●○ *Suite lente dont le cosinus tend vers* 0
Soit (u_n) une suite telle que $\lim\limits_{n}(u_{n+1} - u_n) = 0$ et $\lim\limits_{n} \cos(u_n) = 0$. Montrer que (u_n) converge.

EXERCICE 11. ♢ – ●●○ *Discontinuités d'une fonction monotone*
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction monotone. On note D l'ensemble des points $a \in \mathbb{R}$ tels que f n'est pas continue en a. Montrer qu'il existe une injection de D dans $\mathbb{Q}$.

EXERCICE 12. ♣ – ●●◐ *Une fonction étrange*
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

- $f(x) = 0$ si x est irrationnel ;
- $f(x) = \dfrac{1}{q}$ si $x = \dfrac{p}{q}$, où p et q sont des entiers premiers entre eux et $q > 0$.

Déterminer les points de continuité de f.

2 Fonctions continues sur un intervalle

EXERCICE 13. ◐○○ *Fonction continue à valeurs entières*
Montrer que si f est continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{Z}$, alors f est constante.

EXERCICE 14. ●○○ *Nombre d'annulations d'une fonction*
Donner des exemples de fonctions $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continues, avec $f(0) < 0$ et $f(1) > 0$ telles que :

1. f s'annule une unique fois sur $[0,1]$;
2. f s'annule exactement deux fois sur $[0,1]$;
3. f s'annule une infinité de fois sur $[0,1]$ mais n'est nulle sur aucune intervalle non trivial.

EXERCICE 15. ♣/♢ – ●○○ *Généralisation du théorème des bornes atteintes*
Soit f une application continue sur $\mathbb{R}$. On suppose que $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$.
Montrer que f est minorée et qu'elle atteint sa borne inférieure.

EXERCICE 16. ●◐○ *Même limite aux bornes*
Soit f une application continue sur $]a,b[$ telle que $\lim\limits_{a} f = \lim\limits_{b} f$. Montrer que f n'est pas injective.

EXERCICE 17. ●◐○ *Fonction définie avec un sup*
Soit f une application continue sur $[0,1]$.
Montrer que $g : [0,1] \to \mathbb{R}$, définie par $g(x) = \sup\limits_{0\le t\le x} f(t)$ est bien définie, croissante et continue.

EXERCICE 18. ●◐○ *Limite de* $\dfrac{f(x)}{x}$ *et point fixe*
Soit f une application continue de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$ telle que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \ell < 1$.
Montrer que f admet un point fixe.

EXERCICE 19. ♣ – ●◐○ *Vitesses moyennes*
Une distance de 10 km a été courue en 40 minutes.

1. Montrer qu'il existe une portion de 5 km courue en 20 minutes.
2. Formaliser et généraliser.

EXERCICE 20. ●◐○ *Surjection continue de* $\mathbb{R}_+$ *dans* $\mathbb{R}$
Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une surjection continue.
Montrer que tout réel admet une infinité d'antécédents par f.

EXERCICE 21. ●◐○ *Ensemble des périodes d'une application continue*
Soit f une application continue sur $\mathbb{R}$. On note $\mathcal{T}$ l'ensemble de ses périodes :

$$\mathcal{T} = \left\{T \in \mathbb{R} : \forall x \in \mathbb{R}, f(x+T) = f(x)\right\}.$$

1. Montrer que $\mathcal{T}$ est un sous-groupe additif de $\mathbb{R}$.
2. Montrer que si (t_n) est une suite convergente d'éléments de $\mathcal{T}$, alors sa limite est dans $\mathcal{T}$.
3. On suppose f non constante et $\mathcal{T} \neq \{0\}$. Montrer qu'il existe un unique $a > 0$ tel que $\mathcal{T} = a\mathbb{Z}$.
4. Que dire d'une fonction continue de périodes 1 et $\sqrt{2}$?

EXERCICE 22. ♣/♢ – ●◐○ *Extrema locaux d'une fonction*
Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On note E l'ensemble des réels x tels que f admette un extremum local en f.

1. Montrer qu'il existe une injection de $f(E)$ dans $\mathbb{Q}$.

2. Déterminer les fonctions continues sur $\mathbb{R}$ admettant un extremum local en tout point.

EXERCICE 23. ●◐○ *Fonction discontinue et théorème des valeurs intermédiaires*
Montrer que la fonction f définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} \sin(1/x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$
n'est pas continue mais vérifie la conclusion du théorème des valeurs intermédiaires.

EXERCICE 24. ♣/♢ – ●●○ *Deux points à écart fixé prenant même valeur*
Soit f une application continue sur $[0,1]$ telle que $f(0) = f(1)$.

1. Montrer que, pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, il existe x_n dans $\left[0, 1 - \dfrac{1}{n}\right]$ tel que $f(x_n) = f\left(x_n + \dfrac{1}{n}\right)$.

2. Y a-t-il un résultat analogue si on remplace $\dfrac{1}{n}$ par un réel α dans $[0,1]$?

EXERCICE 25. ●●○ $f \circ f = -\mathrm{id}_{\mathbb{R}}$
Déterminer les applications f continues telles que $f \circ f = -\mathrm{id}_{\mathbb{R}}$.

EXERCICE 26. ●●○ *Au maximum deux antécédents*
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue. On suppose que tout réel a au plus deux antécédents par f.
Montrer qu'il existe un réel n'ayant qu'un seul antécédent.

EXERCICE 27. ●●○ *Discrétisation d'une fonction*
Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Étudier la convergence de la suite $\left(\max\limits_{k \in [\![0,n]\!]} f(\dfrac{k}{n})\right)_n$.

EXERCICE 28. ♣ – ●●◐ *Ouverts et fermés de* $\mathbb{R}$
Une partie U de $\mathbb{R}$ est ouverte si $\forall x \in U, \exists \varepsilon > 0 : [x - \varepsilon, x + \varepsilon] \subset U$.
Une partie F de $\mathbb{R}$ est fermée si, pour tout suite $(u_n) \in F^{\mathbb{N}}$ de limite ℓ, $\ell \in F$.

1. Montrer que U est ouvert ssi $\mathbb{R} - U$ est fermé.

2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes.

   (a) f est continue.
   (b) Pour tout ouvert U, $f^{-1}(U)$ est ouvert.
   (c) Pour tout fermé F, $f^{-1}(F)$ est fermé.

3 Uniforme continuité - fonctions lipzchitziennes

EXERCICE 29. ◐○○ *Approximation de* $\sqrt{2}$
Soit f l'application définie sur $[1,2]$ par $f(x) = \dfrac{x+2}{x+1}$.

1. Montrer que $f\big([1,2]\big) \subset [1,2]$, que $\sqrt{2}$ est point fixe de f et que f est contractante.
2. En déduire quelques décimales de $\sqrt{2}$.

EXERCICE 30. ●○○ *Conditions d'uniforme continuité*
Soit f une application continue sur $\mathbb{R}$. Montrer que f est uniformément continue si l'une des deux conditions suivantes est satisfaite :

1. f a une période $T > 0$;
2. f admet des limites finies en $\pm\infty$.

L'une de ces deux conditions implique-t-elle que f est lipschitzienne ?

EXERCICE 31. ♣ – ●◐○ *Limite sur les entiers ou sur les réels*
Soit f une application uniformément continue sur $\mathbb{R}$. On suppose que $\lim\limits_{n} f(n) = +\infty$ ($n \in \mathbb{N}$). Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

EXERCICE 32. ●◐○ *Uniforme continuité du logarithme*
Montrer que ln n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}_+^*$ mais qu'elle est uniformément continue sur tout intervalle de la forme $[a,+\infty[$, où $a > 0$.

EXERCICE 33. ♣/♢ – ●◐○ *Fonction lipschitzienne avec un sup*
Soient f et g deux applications continues sur $[0,1]$. Soit ϕ l'application définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\phi(x) = \sup_{t\in[0,1]} \big(f(t) + xg(t)\big).$$

Montrer que ϕ est bien définie et que ϕ est lipschitzienne.

EXERCICE 34. ♢ – ●●○ *Borne affine d'une fonction uniformément continue*
Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction uniformément continue. Montrer qu'il existe $a, b \in \mathbb{R}_+$ tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| \leq ax + b.$$

EXERCICE 35. ♣ – ●●○ *Somme alternée des valeurs de f*
Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que $\lim\limits_{n} \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^k f\left(\dfrac{k}{n}\right) = 0$.

Indications

Exercice 4. Pour 1., comment passer de $\mathbb{Q}$ à $\mathbb{R}$? Pour 2., se ramener à 1. plutôt que refaire le raisonnement. Pour 3., f doit être constante sur l'ensemble des valeurs de toute suite (x^{2^n}) ou $(x^{2^{-n}})$.

Exercice 7. Ne pas oublier le théorème de la limite monotone, pour les fonctions.

Exercice 9. L'hypothèse sur la limite implique que si x est suffisamment grand, le numérateur $f(x)$ croît au plus en εx, où $\varepsilon > 0$ est fixé. Où intervient l'hypothèse de croissance ?

Exercice 11. En un point de discontinuité d'une fonction monotone f, f fait un saut. Comment étiqueter ces sauts par un rationnel ?

Exercice 15. Il faut se ramener au comportement de f sur un segment. Attention ! il faut s'assurer que f prend des valeurs plus grandes, hors du segment.

Exercice 22. Se demander pourquoi il n'existe pas nécessairement d'injection de E dans $\mathbb{Q}$. Ensuite, pour construire l'injection, associer à $y \in f(E)$ un rationnel *proche* d'un antécédent de y.

Exercice 24. Pour 1., on cherche à appliquer un TVI à $g : x \mapsto f(x + 1/n) - f(x)$, mais sur quel intervalle ? Pour 2., pour construire un contre-exemple, considérer une déformation d'une fonction α-périodique.

Exercice 33. Pour manipuler les sup, il est plus agréable d'écrire des inégalités valables pour tout t et de passer au sup ensuite.

Exercice 34. Se ramener au comportement sur un segment par des petits sauts.