DM 9 - Interpolation polynomiale

Dans ce problème, on note $\mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n. Un tel polynôme définit une fonction $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, de la forme $x \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$, où les coefficients a_k sont réels.
Si g est une fonction continue sur un segment $[a,b]$, on note $\|g\|_\infty = \sup\left\{|g(x)|, x \in [a,b]\right\}$.

Étant donnée une fonction f définie sur un segment, on peut construire un polynôme de degré $\leq n$ ayant les mêmes valeurs que f en $n+1$ points donnés : on parle de *polynôme interpolateur*.

On étudie à quel point ces polynômes interpolateurs donnent une bonne approximation de la fonction f quand le nombre de points d'interpolation augmente.

1 Polynômes interpolateurs de Lagrange

Soit $[a,b]$ un segment. Soit $\underline{x} = (x_0, \dots, x_n)$ un $(n+1)$-uplet de réels distincts dans $[a,b]$. Soient $y_0, \dots, y_n$ des réels.

1. Soit $i \in [\![0,n]\!]$. Définir un polynôme p non nul de degré n tel que

$$\forall j \in [\![0,n]\!] \setminus \left\{i\right\}, p(x_j) = 0.$$

2. En déduire l'existence d'un polynôme L_i de degré n tel que

$$\forall j \in [\![0,n]\!] \setminus \left\{i\right\}, L_i(x_j) = 0 \text{ et } L_i(x_i) = 1.$$

On définit le polynôme $L = \sum_{i=0}^{n} y_i L_i$.

3. Montrer que L est l'unique polynôme dans $\mathbb{R}_n[X]$ tel que $\forall i \in [\![1,n]\!], L(x_i) = y_i$.

2 Estimation fondamentale

Si f est une fonction à valeurs réelles définie sur $[a,b]$, on note $L_{f,\underline{x}}$ le polynôme L défini dans la partie précédente, quand $y_i = f(x_i)$ pour tout $i \in [\![0,n]\!]$. C'est le *polynôme interpolateur* de la fonction f, en les points d'interpolation de $\underline{x}$.

4. Soit u un point de $[a,b]$ distinct des x_i. Montrer qu'il existe une constante K_u telle que

$$g : x \mapsto f(x) - L_{f,\underline{x}}(x) - K_u \prod_{i=0}^{n}(x - x_i)$$

s'annule en $x_0, \dots, x_n$ et en u.

5. On suppose maintenant f de classe $\mathscr{C}^{n+1}$.
Montrer qu'il existe un réel $c_u \in [a,b]$ tel que $g^{(n+1)}(c_u) = 0$.

6. En déduire l'identité suivante : $f(u) - L_{f,\underline{x}}(u) = \dfrac{f^{(n+1)}(c_u)}{(n+1)!} \displaystyle\prod_{i=0}^{n}(u - x_i)$.

On note $P_{\underline{x}}$ le polynôme $\displaystyle\prod_{i=0}^{n}(X - x_i)$.

7. Montrer la majoration $\|f - L_{f,\underline{x}}\|_\infty \leq \dfrac{\|f^{(n+1)}\|_\infty}{(n+1)!}\|P_{\underline{x}}\|_\infty$.

3 Fonctions à croissance raisonnable

On fixe un entier n et on considère le $(n+1)$-uplet $\underline{x} = (x_0, \dots, x_n)$ donné par

$$\forall k \in [\![0, n]\!], x_k = a + k\frac{b-a}{n}.$$

8. Montrer la majoration $\|P_{\underline{x}}\|_\infty \leq \dfrac{n!}{4}\left(\dfrac{b-a}{n}\right)^{n+1}$.

Une fonction f de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur le segment $[a,b]$ est dite à *croissance raisonnable* s'il existe deux constantes $C > 0$ et $r \geq b - a$ telles que : $\forall n \in \mathbb{N}, \|f^{(n)}\|_\infty \leq C\dfrac{n!}{r^n}$.

9. Montrer que la fonction exp a une croissance raisonnable sur tout segment $[a,b]$.

10. Si $\alpha > 0$, on définit la fonction $f_\alpha : x \mapsto \dfrac{1}{\alpha^2 + x^2}$ sur le segment $[-1,1]$.

    a) Déterminer[1] les valeurs des dérivées successives de f_α en 0.
    b) En déduire que si α est suffisamment petit, la fonction f_α n'est pas à croissance raisonnable sur $[-1,1]$.

11. On suppose que f a une croissance raisonnable sur le segment $[a,b]$. Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que : $\|f - L_{f,\underline{x}}\|_\infty \leq C\dfrac{n!}{n^n}$.

12. En déduire que si f a une croissance raisonnable sur le segment $[a,b]$, alors $\|f - L_{f,\underline{x}}\|_\infty$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini.

[1] On pourra se reporter à l'exercice 23 de la feuille de TD *Fonctions et calcul différentiel.*

4 Phénomène de Runge

Dans cette partie, on montre que les fonctions f_α introduites dans la partie précédente ne sont pas bien interpolées par des polynômes, ce que la question 10 suggère.
C'est le *phénomène de Runge*.

On modifie les points d'interpolation utilisés de la façon suivante. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, on note $a_{k,n} = \dfrac{2k+1}{2n}$. Les $2n$ points $\pm a_{k,n}$ permettent de définir un polynôme interpolateur $R_{n,\alpha}$: c'est l'unique polynôme de $\mathbb{R}_{2n-1}[X]$ tel que

$$\forall k \in [\![0, n-1]\!], R_{n,\alpha}(\pm a_{k,n}) = f_\alpha(\pm a_{k,n}).$$

13. Montrer que $R_{n,\alpha}$ définit une fonction polynomiale paire. En déduire que son degré est inférieur ou égal à $2n-2$.

On définit le polynôme $Q_{n,\alpha} = 1 - (X^2 + \alpha^2)R_{n,\alpha}$.

14. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in [-1,1], Q_{n,\alpha}(x) = \lambda \prod_{k=0}^{n-1}(x^2 - a_{k,n}^2)$.

15. Déterminer la valeur de λ en considérant $Q_{n,\alpha}(\alpha i)$.

16. En déduire que pour tout $x \in [-1,1], f_\alpha(x) - R_{n,\alpha}(x) = \dfrac{(-1)^n}{x^2+\alpha^2} \prod_{k=0}^{n-1} \dfrac{x^2 - a_{k,n}^2}{\alpha^2 + a_{k,n}^2}$.

On souhaite montrer que, si α est suffisamment petit, $|f_\alpha(1) - R_{n,\alpha}(1)| \to +\infty$, quand $n \to +\infty$.

17. On note h_α la fonction $t \mapsto \ln\left(\dfrac{1-t^2}{\alpha^2+t^2}\right)$

    (a) Montrer que h_α est continue et décroissante sur $[0,1[$.

    Pour $\varepsilon \in]0,1/2[$, on note $J_{\alpha,\varepsilon} = \displaystyle\int_\varepsilon^{1-\varepsilon} h_\alpha(t)dt$. Sous réserve d'existence, on note J_α la limite de $J_{\alpha,\varepsilon}$ quand $\varepsilon \to 0^+$.

    (b) Montrer que $J_{\alpha,\varepsilon} = \displaystyle\int_\varepsilon^{1-\varepsilon} \ln u\, du + \int_{1+\varepsilon}^{2-\varepsilon} \ln u\, du - \int_\varepsilon^{1-\varepsilon} \ln(\alpha^2+t^2)dt$.

    (c) En déduire que J_α est bien défini et vaut $2\ln 2 - \ln(1+\alpha^2) - 2\alpha \arctan\left(\dfrac{1}{\alpha}\right)$.

    (d) En déduire que $J_\alpha > 0$ si α est suffisamment petit.

    Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $S_{n,\alpha} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} h_\alpha(a_{k,n})$.

    (e) Montrer que $J_{\alpha,1/2n} + \dfrac{1}{n}h_\alpha\left(1 - \dfrac{1}{2n}\right) \le S_{n,\alpha} \le \dfrac{1}{n}h_\alpha\left(\dfrac{1}{2n}\right) + J_{\alpha,1/2n}$.

    (f) En déduire que $S_{n,\alpha} \to J_\alpha$, quand $n \to +\infty$.

    (g) Conclure.

5 Interpolation en les nœuds de Tchebychev

Du point de vue de l'interpolation polynomiale, le choix de points d'interpolation espacés de façon régulière n'est pas le plus pertinent. Étant fixé $n \in \mathbb{N}^*$, il est naturel – au vu de la question 7 – de chercher un $n+1$-uplet $\underline{x} = (x_0, \dots, x_n)$ minimisant la quantité $\|P_{\underline{x}}\|_\infty$.

18. a) Montrer qu'il existe, pour tout $n \in \mathbb{N}$, un unique polynôme $T_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta).$$

Préciser le degré et le coefficient dominant de T_n.

b) Calculer T_0 et T_1. Montrer la relation de récurrence suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N} : T_{n+2} + T_n = 2X T_{n+1}.$$

c) Déterminer les racines de T_n et en déduire une factorisation de T_n.

On se place désormais sur le segment $[a, b] = [-1, 1]$.

19. Montrer que $\|T_n\|_\infty = 1$. Montrer qu'il existe exactement $n+1$ points $-1 = y_0 < y_1 < \dots < y_n = 1$ en lesquels T_n vaut ± 1. Préciser la valeur de $T_n(y_k)$.

20. Soit P un polynôme unitaire de degré n. En considérant le polynôme $Q = P - \dfrac{T_n}{2^{n-1}}$ et les valeurs de Q en les points y_k, montrer que $\|P\|_\infty \geq \dfrac{1}{2^{n-1}}$.

Ceci montre que, parmi les polynômes unitaires P de degré n, $\dfrac{T_n}{2^{n-1}}$ est le seul minimisant $\|P\|_\infty$ sur $[-1, 1]$. Cela justifie d'utiliser les racines de T_n pour l'interpolation polynomiale d'une fonction sur $[-1, 1]$ – ou sur un autre segment à l'aide d'une transformation affine.