

Semaine 12 - Dérivabilité

1 Révisions d'analyse

Suites, limites, continuité

2 Dérivabilité, résultats généraux

- Nombre dérivé, interprétation graphique, interprétation cinématique, équation de la tangente
- Dérivée à gauche, dérivée à droite
- Notion de développement limité à l'ordre 1
- Si une fonction est dérivable en a , elle est continue en a
- Fonctions de classe $\mathcal{D}^k$, de classe $\mathcal{C}^k$.
- Exemple. Étude de la famille de fonctions $f_n : x \mapsto x^n \sin(1/x)$.
- Opérations usuelles sur les dérivées, stabilité de la classe $\mathcal{C}^k$ par combinaisons linéaires, produits, quotients, compositions
- Dérivée d'une bijection réciproque ; la réciproque d'une fonction de classe $\mathcal{C}^k$ est de classe $\mathcal{C}^k$

3 Théorèmes de Rolle et des accroissements finis

- Extremum local, point critique
- Si f est dérivable en un point a où est atteint un extremum local, et si a n'est pas une borne de l'intervalle de définition de f , alors a est un point critique de f
- La réciproque est fausse.
- Théorème de Rolle, interprétation graphique, interprétation cinématique
- Théorème des accroissements finis, interprétation graphique, interprétation cinématique
- Inégalité des accroissements finis
- Inégalité des accroissements finis pour une fonction à valeurs complexes.
Démonstration non exigible.

4 Applications des accroissements finis

- Variations de fonctions et signe de la dérivée

- Une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un segment est lipschitzienne
- Théorème sur la limite de la dérivée
- Théorème de prolongement des applications de classe $\mathcal{C}^k$, $k \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$

5 Questions de cours

- Calcul en un point de la dérivée d'une bijection réciproque
- Étude locale de la régularité d'une fonction
- Théorème de Rolle
- Théorème et inégalité des accroissements finis (cas réel)
- Théorème de Bolzano-Weierstrass, théorème des valeurs intermédiaires, théorème des bornes atteintes, théorème de Heine