

DM 10 – Théorème de d'Alembert-Gauss – Inégalité de Bernstein

1 Théorème de d'Alembert-Gauss

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré $d \geq 1$. On cherche à montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $P(\alpha) = 0$.

1. Justifier l'existence de $m = \inf \{|P(z)|, z \in \mathbb{C}\}$.

2. On note $P = \sum_{k=0}^d a_k X^k$, avec $a_d \neq 0$. Montrer que, pour tout $z \in \mathbb{C}$ vérifiant $|z| \geq 1$:

$$|P(z)| \geq |a_d||z|^d - \sum_{k=0}^{d-1} |a_k||z|^k \geq |z|^{d-1} \left(|a_d||z| - \sum_{k=0}^{d-1} |a_k| \right).$$

3. En déduire qu'il existe $R > 0$ tel que, si $|z| \geq R$, alors $|P(z)| \geq m + 1$.

4. En déduire l'existence d'une suite $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergente telle que $|P(z_n)|$ converge vers m .

5. On note $\alpha = \lim_n z_n$. Montrer que $|P(\alpha)| = m$.

On suppose par l'absurde que $m \neq 0$. On note $\theta \in [0, 2\pi[$ l'unique angle tel que $P(\alpha) = m e^{i\theta}$.

6. Montrer l'existence de $k_0 = \min \{k \in \mathbb{N}^* \mid P^{(k)}(\alpha) \neq 0\}$.

7. Montrer qu'il existe une fonction $\varepsilon : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, telle que $\lim_{\alpha} \varepsilon = 0$ et

$$\forall z \in \mathbb{C}, P(z) = P(\alpha) + \frac{P^{(k_0)}(\alpha)}{k_0!} (z - \alpha)^{k_0} (1 + \varepsilon(z)).$$

8. Montrer qu'il existe un angle $\phi \in [0, 2\pi[$ tel que, pour tout $r \geq 0$, si $z = \alpha + r e^{i\phi}$, alors

$$P(\alpha) + \frac{P^{(k_0)}(\alpha)}{k_0!} (z - \alpha)^{k_0} = \left(m - \frac{|P^{(k_0)}(\alpha)|}{k_0!} r^{k_0} \right) e^{i\theta}.$$

9. En déduire que si $z = \alpha + r e^{i\phi}$ et si r est suffisamment petit, $|P(z)| \leq m - \frac{|P^{(k_0)}(\alpha)|}{2k_0!} r^{k_0}$.

Conclure.

2 Inégalité de Bernstein

Soit $n \in \mathbb{N}$. Une fonction $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ est un *polynôme trigonométrique* de degré $\leq n$ si

$$\exists(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^{n+1}, \exists(b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{C}^n : \forall t \in \mathbb{R}, T(t) = a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)).$$

On note $\mathcal{T}_n$ l'ensemble de ces fonctions.

Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ est une fonction bornée, on note $\|f\|_\infty = \sup \{|f(x)|, x \in \mathbb{R}\}$.

1. Montrer que si $T \in \mathcal{T}_n$, alors $T' \in \mathcal{T}_n$.
2. Montrer que les fonctions de $\mathcal{T}_n$ sont 2π -périodiques et bornées sur $\mathbb{R}$.

Soit $P \in \mathbb{C}_{2n}[X]$, soit $\lambda \in \mathbb{C}$. On définit $P_\lambda \in \mathbb{C}_{2n}[X]$ par $P_\lambda = P(\lambda X) - P(\lambda)$.

3. Montrer que $X - 1$ divise P_λ .
4. On note Q_λ le quotient de P_λ par $X - 1$. Montrer que $Q_\lambda(1) = \lambda P'(\lambda)$.
5. Soit $A \in \mathbb{C}_{2n}[X]$ scindé à racines simples, de racines $\alpha_1, \dots, \alpha_{2n}$. Montrer¹ que

$$\forall B \in \mathbb{C}_{2n-1}[X], B = \sum_{k=1}^{2n} B(\alpha_k) \frac{A}{(X - \alpha_k) A'(\alpha_k)}.$$

Pour tout $k \in \llbracket 1, 2n \rrbracket$, on note $\phi_k = \frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}$ et $\omega_k = e^{i\phi_k}$.

6. En considérant le polynôme $R = X^{2n} + 1$, montrer que

$$Q_\lambda = -\frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{2n} \frac{P(\lambda\omega_k) - P(\lambda)}{\omega_k - 1} \frac{X^{2n} + 1}{X - \omega_k} \omega_k$$

puis que

$$\lambda P'(\lambda) = \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{2n} P(\lambda\omega_k) \frac{2\omega_k}{(1 - \omega_k)^2} - \frac{P(\lambda)}{2n} \sum_{k=1}^{2n} \frac{2\omega_k}{(1 - \omega_k)^2}.$$

7. En appliquant l'égalité précédente au polynôme X^{2n} , en déduire que

$$\lambda P'(\lambda) = \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{2n} P(\lambda\omega_k) \frac{2\omega_k}{(1 - \omega_k)^2} + nP(\lambda).$$

8. Pour tout $k \in \llbracket 1, 2n \rrbracket$, simplifier $\frac{2\omega_k}{(1 - \omega_k)^2}$.

On considère une fonction T dans $\mathcal{T}_n$.

9. Montrer qu'il existe $U \in \mathbb{C}_{2n}[X]$ tel que $\forall t \in \mathbb{R}, T(t) = e^{-int} U(e^{it})$.
10. En déduire que pour tout $t \in \mathbb{R}, T'(t) = \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{2n} T(t + \phi_k) \frac{(-1)^k}{2 \sin^2(\phi_k/2)}$.
11. En déduire l'*inégalité de Bernstein* : $\|T'\|_\infty \leq n \|T\|_\infty$.

¹Si α est une racine d'un polynôme P , on désigne (abusivement, pour le moment) par $\frac{P}{X - \alpha}$ le quotient de P par $X - \alpha$.