

## Polynômes

### 1 Calculs dans $\mathbb{K}[X]$

**EXERCICE 1.**  $\diamond - \circ\circ\circ$  *Calcul sur les coefficients*

Soit  $n \geq 2$  un entier. Déterminer le degré, le coefficient dominant et le coefficient constant de

$$P_n = (X + 1)^{2n} + (X - 1)^{2n} - 2(X^2 + 1)^n.$$

**EXERCICE 2.**  $\circ\circ\circ$  *Degré de  $P(X) - P(X + 1)$*

Soit  $P$  un polynôme de  $\mathbb{K}[X]$ . Déterminer en fonction de degré de  $P$  le degré du polynôme

$$P(X + 1) - P(X).$$

**EXERCICE 3.**  $\diamond - \bullet\circ\circ$  *Équations polynomiales avec la dérivée*

Résoudre dans  $\mathbb{K}[X]$  :

- |                           |                          |                                       |
|---------------------------|--------------------------|---------------------------------------|
| 1. $P'' + P' = X^2 + 1$ ; | 3. $(X^2 - X)P'' = 6P$ ; | 5. $P - P' = X^n, n \in \mathbb{N}$ . |
| 2. $P + XP' = 0$ ;        | 4. $(P')^2 = 4P$ ;       |                                       |

### 2 Dérivation

**EXERCICE 4.**  $\diamond - \bullet\circ\circ$  *Valeurs prescrites des dérivées de  $P$  en un point*

Trouver les polynômes  $P$  de  $\mathbb{K}[X]$  vérifiant  $P(2) = 1, P'(2) = 2, P''(2) = 4$  et  $P^{(n)}(2) = 0$ , pour  $n \geq 3$ .

**EXERCICE 5.**  $\clubsuit - \bullet\circ\circ$  *Division euclidienne par  $(X - \alpha)^n$*

Soit  $P \in \mathbb{K}[X]$ . Soient  $\alpha \in \mathbb{K}$  et  $n \in \mathbb{N}$ . Écrire le reste de la division euclidienne de  $P$  par  $(X - \alpha)^n$ , comme combinaison linéaire des polynômes  $(X - \alpha)^k$ , avec  $k \leq n - 1$ .

**EXERCICE 6.**  $\bullet\circ\circ$  *Absence de racines avec condition sur les dérivées*

Soit  $P \in \mathbb{R}[X]$  et  $a \in \mathbb{R}$  tels que  $P(a) > 0$  et, pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ ,  $P^{(k)}(a) \geq 0$ .

Montrer que  $P$  ne possède pas de racines dans  $[a, +\infty[$ .

### 3 Arithmétique de $\mathbb{K}[X]$

**EXERCICE 7.**  $\clubsuit - \bullet\circ\circ$  *Relations de Bézout*

1. Soient  $P$  et  $Q$  définis par  $P = 3X^4 + 3X^3 - 4X^2 - 2X - 9$  et  $Q = X^2 + X + 1$ .  
Déterminer un couple  $(U, V)$  de polynômes tels que  $PU + QV = 1$ .

2. Soient  $P$  et  $Q$  définis par  $P = 2X^4 + X^3 - X^2 - X - 1$  et  $Q = X^3 + X^2 + X - 3$ .  
Calculer le PGCD  $D$  de  $P$  et  $Q$  et déterminer une relation de Bézout  $PU + QV = D$ .

**EXERCICE 8.** ●○○ *Divisibilité*

Soit  $n \in \mathbb{N}$ .

1. Montrer que  $P_n = (X-1)^{n+2} + X^{2n+1}$  est divisible par  $X^2 - X + 1$ .
2. Donner une condition nécessaire et suffisante sur  $n$  pour que  $Q_n = X^{2n} + X^n + 1$  soit divisible par  $X^2 + X + 1$ .

**EXERCICE 9.** ♣ – ●○○ *Polynômes  $X^n - 1$*

Soient  $n$  et  $p$  deux entiers naturels non nuls, tels que  $n \geq p$ .

1. Effectuer la division euclidienne de  $X^n - 1$  par  $X^p - 1$ .
2. En déduire une condition nécessaire et suffisante sur  $n$  et  $p$  pour que  $X^n - 1$  soit divisible par  $X^p - 1$ .
3. Calculer le PGCD de  $X^n - 1$  et  $X^p - 1$ .

**EXERCICE 10.** ◇ – ●●○○  *$P(P(X)) - X$  est divisible par  $P(X) - X$*

Soit  $P \in \mathbb{K}[X]$ . Montrer que  $P(P(X)) - X$  est divisible par  $P(X) - X$ .

**EXERCICE 11.** ●●○○ *Polynôme divisible par son polynôme dérivé*

On suppose que  $\mathbb{K}$  est de caractéristique nulle. Déterminer les  $P \in \mathbb{K}[X]$  tels que  $P'$  divise  $P$ .

**EXERCICE 12.** ●●○○ *PGCD de la somme et du produit*

Soient  $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ .

1. Montrer que  $P \wedge Q = 1$  ssi  $(P + Q) \wedge PQ = 1$ .
2. Quelle relation existe-t-il en général entre  $P \wedge Q$  et  $(P + Q) \wedge PQ$  ?

## 4 Racines

**EXERCICE 13.** ●○○ *Rigidité des polynômes*

1. Montrer qu'il n'existe pas  $P \in \mathbb{C}[X]$  tel que  $\forall z \in \mathbb{C}, P(z) = \bar{z}$ .
2. Soit  $I$  un intervalle non trivial de  $\mathbb{R}$ .  
Montrer qu'il n'existe pas  $P \in \mathbb{R}[X]$  tel que  $\forall x \in I, P(x) = \sin x$ .
3. Soit  $T \in \mathbb{C}^*$ . Déterminer les fonctions polynomiales à coefficients complexes  $T$ -périodiques.
4. Montrer qu'il n'existe pas  $P \in \mathbb{C}[X]$  tel que pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$  :

(a)  $P(k) = \frac{1}{k}$  ;                      (b)  $P(k) = \sqrt{k^2 + 1}$  ;                      (c)  $P(k) = 2^k$ .

**EXERCICE 14.** ♣/◇ – ●○○ *Liberté algébrique d'une famille de fonctions*

Soient  $P$  et  $Q$  dans  $\mathbb{R}[X]$ . On suppose que  $\forall x \in \mathbb{R}, P(x) \cos x + Q(x) \sin x = 0$ .  
Montrer que  $P$  et  $Q$  sont nuls.

**EXERCICE 15.** ●●○ *Dérivée d'un polynôme scindé dans  $\mathbb{R}[X]$*

Soit  $P$  un polynôme scindé de  $\mathbb{R}[X]$ . Montrer que  $P'$  est scindé sur  $\mathbb{R}[X]$ .

**EXERCICE 16.** ♣/◇ – ●●○ *Coefficients successifs d'un polynôme scindé à racines simples*

Soit  $P$  un polynôme réel scindé à racines simples de degré  $\geq 2$

1. Montrer que  $P$  n'a pas deux coefficients nuls successifs.
2. Montrer que les coefficients situés de part et d'autre d'un coefficient nul de  $P$  ne sont pas de même signe.

**EXERCICE 17.** ●●○ *Troncature de l'exponentielle*

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Montrer que  $P = \sum_{k=0}^n \frac{X^k}{k!}$  n'a pas de racines multiples dans  $\mathbb{C}$ .

**EXERCICE 18.** ●●○ *Racines de  $P^2 + 1$*

Soit  $P \in \mathbb{R}[X]$  scindé à racines simples. Montrer que les racines complexes de  $P^2 + 1$  sont simples.

**EXERCICE 19.** ◇ – ●●○ *Racines et division euclidienne*

1. Déterminer un polynôme simple s'annulant en  $1 + \sqrt{2}$ .  
En déduire la valeur en  $1 + \sqrt{2}$  de  $P = 2X^5 - 4X^4 - 2X^3 + 3X^2 - 5X - 4$ .
2. Déterminer la valeur en  $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$  de  $Q = 3X^4 + 7X^3 + X^2 - 2X + 5$ .
3. Soient  $R$  et  $S$  définis par  $R = X^{107} - X^3 + 1$  et  $S = X^2 + 2X - 3$ .  
Déterminer le reste dans la division euclidienne de  $R$  par  $S$ .

**EXERCICE 20.** ♣ – ●●○ *Racines et division euclidienne, avec paramètres*

1. Soient  $\theta \in \mathbb{R}$  et  $n \in \mathbb{N}$ . Déterminer le reste dans la division euclidienne de  $(\cos \theta + X \sin \theta)^n$  par  $X^2 + 1$ , puis par  $(X^2 + 1)^2$ .
2. Soient  $\lambda$  et  $\mu$  deux éléments de  $\mathbb{K}$  et soit  $P \in \mathbb{K}[X]$ .  
Exprimer le reste de la division euclidienne de  $P$  par  $(X - \lambda)(X - \mu)$ .

**EXERCICE 21.** ◇ – ●●○ *Polynôme dans  $\mathbb{Q}[X]$  dont  $\sqrt{2}$  est une racine*

Soit  $P \in \mathbb{Q}[X]$  tel que  $P(\sqrt{2}) = 0$ . Montrer que  $P(-\sqrt{2}) = 0$ .

**EXERCICE 22.** ♣/◇ – ●●○ *Polynômes de Legendre*

Pour tout entier naturel  $n$ , on pose  $L_n = \frac{n!}{(2n)!} ((X^2 - 1)^n)^{(n)}$ .

1. Montrer que  $L_n$  est un polynôme unitaire de degré  $n$ .
2. Montrer que pour tout polynôme réel  $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ , on a  $\int_{-1}^1 L_n(t) Q(t) dt = 0$ .
3. En déduire que  $L_n$  est scindé à racines simples et que ses racines sont toutes dans  $] -1, 1[$ .

**EXERCICE 23.** ♣ – ●●○ *Borne de Cauchy*

Soit  $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$  un polynôme unitaire. On note  $Z(P)$  l'ensemble de ses racines complexes.

1. Montrer  $\forall \zeta \in Z(P), |\zeta|^n \leq \sum_{k=0}^{n-1} |a_k| |\zeta|^k$  et en déduire  $\forall \zeta \in Z(P) \setminus \{0\}, |\zeta| \leq \sum_{\ell=0}^{n-1} \frac{|a_{n-1-\ell}|}{|\zeta|^\ell}$ .
2. Utiliser la question précédente pour montrer

$$\forall \zeta \in Z(P), |\zeta| \leq \max \left( 1, \sum_{k=0}^{n-1} |a_k| \right).$$

3. En réutilisant le résultat de la première question, montrer la *borne de Cauchy*

$$\forall \zeta \in Z(P), |\zeta| \leq 1 + \max(|a_0|, \dots, |a_{n-1}|).$$

## 5 Factorisation

**EXERCICE 24.** ●○○ *Factorisation de  $X^n - 1$*

Décomposer  $X^n - 1$  en produit de facteurs irréductibles dans  $\mathbb{C}[X]$ , puis dans  $\mathbb{R}[X]$ .

**EXERCICE 25.** ♣ – ●○○ *Un produit de sinus*

Soit  $a \in \mathbb{R}$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $P_n = (X+1)^n - e^{2ina}$ .

1. Déterminer les racines de  $P_n$  ainsi que leur multiplicité.

2. En déduire la valeur de  $\prod_{k=0}^{n-1} \sin \left( a + \frac{k\pi}{n} \right)$ .

**EXERCICE 26.** ♣ – ●●○ *Factorisations dans  $\mathbb{R}[X]$*

Décomposer en facteurs irréductibles dans  $\mathbb{R}[X]$  les polynômes suivants ( $n \in \mathbb{N}$  et  $\theta \in \mathbb{R}$ ) :

1.  $X^6 + 1$  ;
2.  $X^6 + 2X^4 + 2X^2 + 1$  ;
3.  $X^4 + 2(\cos \alpha)X^2 + 1$  ;
4.  $X^6 - 2(\cos \alpha)X^3 + 1$  ;
5.  $X^{2n} - X^n \cos \theta + 1$ .

**EXERCICE 27.** ♣ – ●●○ *Un produit de cotangentes*

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$

1. Factoriser dans  $\mathbb{C}[X]$  le polynôme  $(X+1)^n - (X-1)^n$ .

2. En déduire, pour tout  $p \in \mathbb{N}^*$  l'identité  $\prod_{k=1}^p \cotan \left( \frac{k\pi}{2p+1} \right) = \frac{1}{\sqrt{2p+1}}$ .

**EXERCICE 28.** ♣ – ●●○ *Polynômes de Tchebychev*

1. Montrer qu'il existe, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , un unique polynôme  $T_n \in \mathbb{R}[X]$  tel que

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, T_n(\cos \theta) = \cos(n\theta).$$

2. Calculer  $T_0$  et  $T_1$ . Montrer la relation de récurrence suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, T_{n+2} + T_n = 2X T_{n+1}.$$

En déduire le degré et le coefficient dominant de  $T_n$ .

3. Déterminer les racines de  $T_n$  et en déduire une factorisation de  $T_n$ .

## 6 Relation coefficients-racines

**EXERCICE 29.** ●○○ *Moyenne des racines*

Soit  $P \in \mathbb{C}[X]$  de degré  $\geq 2$ .

Montrer que les moyennes des racines de  $P$  et  $P'$  sont les mêmes (en comptant les multiplicités).

**EXERCICE 30.** ◇ – ●●○ *Une racine somme des deux autres*

On considère le polynôme  $P = X^3 + pX^2 + qX + r \in \mathbb{C}[X]$ .

Trouver une condition nécessaire et suffisante sur  $p$ ,  $q$  et  $r$  pour qu'une des racines de  $P$  soit la somme des deux autres racines.

**EXERCICE 31.** ♣ – ●●○ *Discriminant d'un polynôme de degré 3*

Soit  $q \neq 0$  et soient  $x_1$ ,  $x_2$  et  $x_3$  les trois racines complexes de l'équation  $x^3 + px + q = 0$ .

1. Exprimer  $(x_1 - x_2)^2$  en fonction de  $x_1 + x_2$  et  $x_1 x_2$ . Puis en fonction de  $x_3$ ,  $p$  et  $q$ .
2. En déduire l'identité  $(x_1 - x_2)^2(x_2 - x_3)^2(x_3 - x_1)^2 = -(4p^3 + 27q^2)$ .
3. En déduire une condition nécessaire et suffisante sur  $p$  et  $q$  pour que le polynôme  $X^3 + pX + q$  ait une racine double.

**EXERCICE 32.** ●●○ *Un jeu d'écriture*

Soit  $P = X^3 + pX^2 + qX + r$ , de racines complexes  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$  telles qu'aucune racine n'est l'opposée d'une autre. Exprimer en fonction de  $p$ ,  $q$  et  $r$  la quantité  $\frac{\alpha}{\beta + \gamma} + \frac{\beta}{\gamma + \alpha} + \frac{\gamma}{\alpha + \beta}$ .

**EXERCICE 33.** ●●○ *Deux systèmes d'équations polynomiales*

1. Déterminer les triplets  $(x, y, z)$  de nombres complexes tels que

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ xy + yz + zx = -5 \\ xyz = -6. \end{cases}$$

2. Déterminer les triplets  $(x, y, z)$  de nombres complexes tels que

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 6 \\ x^3 + y^3 + z^3 = 8. \end{cases}$$

**EXERCICE 34.**  $\diamond - \bullet\bullet\circ$  *Polynômes à coefficients entiers et racines bornées*

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Montrer qu'il n'existe qu'un nombre fini de polynômes unitaires à coefficients entiers dont toutes les racines complexes sont de module  $\leq 1$ .

## 7 Interpolation de Lagrange

**EXERCICE 35.**  $\clubsuit - \bullet\circ\circ$  *Identités sur les polynômes de Lagrange*

Soient  $x_0, \dots, x_n \in \mathbb{K}$  deux à deux distincts. Pour tout  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ , on note  $L_k$  l'unique polynôme de degré  $\leq n$  tel que  $\forall j \in \llbracket 0, n \rrbracket, L_k(x_j) = \delta_{k,j}$ . Identifier  $\sum_{k=0}^n L_k$  et  $\sum_{k=0}^n x_k L_k$ .

**EXERCICE 36.**  $\diamond - \bullet\bullet\circ$  *Valeurs réelles en des réels*

1. Soit  $P \in \mathbb{C}[X]$  tel que  $P(\alpha) \in \mathbb{R}$ , pour une infinité de  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Montrer que  $P \in \mathbb{R}[X]$ .
2. Généraliser.

**EXERCICE 37.**  $\clubsuit - \bullet\bullet\circ$  *Valeurs d'un polynôme interpolateur*

Soit  $P \in \mathbb{R}_n[X]$  tel que  $\forall k \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket, P(k) = \frac{1}{k}$ . Déterminer  $P(0)$ .

**EXERCICE 38.**  $\clubsuit/\diamond - \bullet\bullet\bullet$  *Minoration de la valeur d'un polynôme en un entier*

Soient  $a_0 < a_1 < \dots < a_n$  des entiers et soit  $P \in \mathbb{C}[X]$  unitaire de degré  $n$ . Montrer que

$$\max_{0 \leq k \leq n} |P(a_k)| \geq \frac{n!}{2^n}.$$

## 8 En lien avec l'arithmétique/l'algèbre générale

**EXERCICE 39.**  $\bullet\circ\circ$  *Polynômes sur  $\mathbb{R}$  et sur  $\mathbb{C}$*

Soient  $A$  et  $B$  deux polynômes de  $\mathbb{R}[X]$ . Justifier les assertions suivantes :

1.  $A$  divise  $B$  dans  $\mathbb{R}[X]$  si et seulement si  $A$  divise  $B$  dans  $\mathbb{C}[X]$ .
2. Le PGCD de  $A$  et  $B$  est le même dans  $\mathbb{R}[X]$  et dans  $\mathbb{C}[X]$ .

**EXERCICE 40.**  $\bullet\bullet\circ$  *Racines d'un irréductible de  $\mathbb{Q}[X]$*

Soit  $P$  irréductible dans  $\mathbb{Q}[X]$ . Montrer que les racines de  $P$  dans  $\mathbb{C}$  sont simples.

**EXERCICE 41.**  $\bullet\bullet\circ$  *Racine rationnelle d'un polynôme à coefficients entiers*

Soit  $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$  un polynôme à coefficients entiers.

1. On suppose que  $P$  a une racine rationnelle  $x = \frac{p}{q}$  avec  $p \wedge q = 1$ . Montrer que  $q$  divise  $a_n$  et  $p$  divise  $a_0$ . En déduire un algorithme donnant les racines rationnelles de  $P$ .
2. Montrer que  $p - q$  divise  $\sum_{k=0}^n a_k$  et que  $p + q$  divise  $\sum_{k=0}^n (-1)^k a_k$ .
3. En déduire que  $X^3 + X^2 + X + 2$  est irréductible dans  $\mathbb{Q}[X]$ .

**EXERCICE 42.** ♣ – ●●○ *Infinité de valeurs non premières*

Soit  $P$  un polynôme à coefficients entiers. Montrer que si  $P$  n'est pas constant, alors il existe une infinité de  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $P(n)$  n'est pas premier.

**EXERCICE 43.** ♣ – ●●○ *Contenu d'un polynôme et critère d'Eisenstein*

Soit  $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$  un polynôme à coefficients entiers. Le contenu de  $P$  est le PGCD de ses coefficients.

On dit que  $P$  est primitif si son contenu est égal à 1.

1. Montrer que le produit de deux polynômes primitifs de  $\mathbb{Z}[X]$  est primitif.
2. Plus généralement, montrer que le contenu du produit de deux polynômes de  $\mathbb{Z}[X]$  est le produit de leur contenu.
3. Si  $P \in \mathbb{Z}[X]$  est irréductible non constant dans  $\mathbb{Z}[X]$ , montrer qu'il est irréductible dans  $\mathbb{Q}[X]$ .  
*Un polynôme  $P \in \mathbb{Z}[X]$  est irréductible dans  $\mathbb{Z}[X]$  si, quand on l'écrit  $P = QR$ , avec  $Q, R \in \mathbb{Z}[X]$ , alors  $Q$  ou  $R$  vaut  $\pm 1$ .*
4. **Critère d'Eisenstein.** On suppose qu'il existe un nombre premier  $p$  tel que
  - a)  $p$  divise  $a_0, \dots, a_{n-1}$ .
  - b)  $p$  ne divise pas  $a_n$ .
  - c)  $p^2$  ne divise pas  $a_0$ .

Montrer que  $P$  est irréductible dans  $\mathbb{Q}[X]$ .

5. Montrer que pour tout  $n \geq 2$ , le polynôme  $X^n - 2$  est irréductible dans  $\mathbb{Q}[X]$ .

**EXERCICE 44.** ♣ – ●●○ *Polynômes cyclotomiques*

1. Soit  $p$  un nombre premier. Montrer qu'il existe  $\Phi_p \in \mathbb{Z}[X]$  tel que  $X^p - 1 = (X - 1)\Phi_p(X)$ .
2. Calculer  $\Phi_p(X + 1)$  et en déduire que  $\Phi_p$  est un polynôme irréductible de  $\mathbb{Q}[X]$ .
3. Écrire le polynôme  $X^{2p} - 1$  comme produit de polynômes irréductibles de  $\mathbb{Q}[X]$ .
4. Montrer qu'il existe  $\Phi_{p^2} \in \mathbb{Z}[X]$  tel que  $X^{p^2} - 1 = (X - 1)\Phi_p(X)\Phi_{p^2}(X)$ .
  - (a) Factoriser  $\Phi_{p^2}(X)$  dans  $\mathbb{C}[X]$ .
  - (b) Montrer que  $\Phi_{p^2}(X)$  est irréductible dans  $\mathbb{Q}[X]$ .
5. Soit  $k \in \mathbb{N}^*$ . Factoriser  $X^{p^k} - 1$  dans  $\mathbb{Q}[X]$ .
6. Trouver le plus petit entier  $n \in \mathbb{N}^*$  tel que  $X^n - 1$  n'ait pas été factorisé dans  $\mathbb{Q}[X]$  lors des questions précédentes, et factoriser ce polynôme.



## Indications

**Exercice 1.** Développer par la formule du binôme et considérer les coefficients de plus grand degré, jusqu'à en trouver un non nul.

**Exercice 3.** Obtenir des informations sur le degré de  $P$  avant d'écrire ses coefficients.

**Exercice 4.** Formule de Taylor...

**Exercice 10.**  $P(P(X)) - X = P(P(X)) - P(X) + P(X) - X$ .

**Exercice 14.** Montrer que  $P$  et  $Q$  ont une infinité de racines.

**Exercice 16.** Utiliser que si  $P$  est réel scindé à racines simples, alors  $P'$  aussi.

**Exercice 19.** Pour obtenir les valeurs dans 1. et 2., faites une division euclidienne. Faites le contraire dans 3. en considérant les racines de  $S$ .

**Exercice 21.** Considérer les parties paire et impaire de  $P$ .

**Exercice 22.** Pour 2., utiliser plusieurs intégrations par parties. Pour 3., une possibilité est d'énoncer et localiser par récurrence les racines de  $((X^2 - 1)^n)^{(k)}$ , pour  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ .

**Exercice 30.** Déterminer une quantité symétrique en les racines, nulle ssi l'une des racines est la somme des deux autres. Puis utiliser les formules de Viète.

**Exercice 34.** Donner une majoration des coefficients de ces polynômes.

**Exercice 36.** Par interpolation de Lagrange, un polynôme de degré  $n$  est entièrement connu par sa valeur en  $n + 1$  points.

**Exercice 38.** Commencer par écrire  $P$  en fonction des  $P(a_k)$ . Puis utiliser le fait que  $P$  est unitaire.

**Exercice 48.** Pour le sens difficile, on peut passer par une factorisation dans  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .