Semaine 13 - Convexité – Polynômes

Pour la partie Polynômes, tout le chapitre a été traité sauf les relations coefficients-racines. Peu d'exercices ont été traités pour le moment.

1 Convexité

- Partie convexe du plan
- Épigraphe d'une fonction
- Fonction convexe
- Inégalité des pentes : il y a équivalence entre
  - f est convexe sur I
  - pour tout $a \in I$, $\tau_{a,f}$ définie sur $I - \{a\}$ par $\tau_{a,f}(x) = \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ est croissante
  - Pour tous $a < b < c$ dans I :

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \frac{f(c) - f(a)}{c - a} \leq \frac{f(c) - f(b)}{c - b}.$$

  De plus, les trois inégalités précédentes sont en fait équivalentes.
- Inégalité de Jensen
- Une fonction dérivable est convexe ssi sa dérivée est croissante.
- Une fonction deux fois dérivable est convexe ssi sa dérivée seconde est positive.
- Inégalité arithmético-géométrique

2 Présentation de $\mathbb{K}[X]$

- Définition de $\mathbb{K}[X]$ comme ensemble des suites à support fini. *Rien d'exigible.*
- $\mathbb{K}[X]$ est un anneau commutatif intègre
- Degré d'un polynôme, degré d'une somme, d'un produit
- Inversibles de $\mathbb{K}[X]$, polynômes associés
- Composition de deux polynômes, évaluation d'un polynôme en $a \in \mathbb{K}$
- Polynômes et applications polynomiales
- Polynôme dérivé, opérations usuelles
- Formule de Taylor formelle *sur un corps de caractéristique nulle*

3 Arithmétique de $\mathbb{K}[X]$

- Relation de divisibilité

- Existence et unicité de la division euclidienne dans $\mathbb{K}[X]$
- Idéal dans un anneau commutatif, idéal principal, anneau principal
- $\mathbb{K}[X]$ est un anneau principal
- PGCD de A et B, défini comme un générateur de l'idéal $A\mathbb{K}[X]+B\mathbb{K}[X]$. La notation $A \wedge B$ désigne le générateur unitaire (ou 0 si A et B sont nuls)
- PPCM de A et B, défini comme un générateur de l'idéal $A\mathbb{K}[X]\cap B\mathbb{K}[X]$. La notation $A \vee B$ désigne le générateur unitaire (ou 0 si A ou B est nul)
- Extension à un nombre fini de polynômes et propriétés usuelles
- Polynômes premiers entre eux, identité de Bézout
- Propriétés usuelles, dont lemme de Gauss
- Polynômes irréductibles, exemple de $X - \alpha$, $\alpha \in \mathbb{K}$
- Propriétés usuelles, dont lemme d'Euclide
- Tout polynôme non nul admet une unique écriture (à l'ordre près des facteurs) $\lambda \displaystyle\prod_{i=1}^{r} P_i^{n_i}$, où les P_i sont des polynômes irréductibles unitaires, les n_i sont des entiers naturels et $\lambda \in \mathbb{K}^{\times}$.

4 Racines d'un polynôme

- Racine α d'un polynôme P ; P a α pour racine ssi $X - \alpha$ divise P
- Si P a r racines $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ deux à deux distinctes, il est divisible par $\displaystyle\prod_{i=1}^{r}(X - \alpha_i)$
- Un polynôme de degré $d \in \mathbb{N}$ a au plus d racines
- Multiplicité d'une racine, vocabulaire correspondant
- Si P a r racines $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ deux à deux distinctes de multiplicité respective $m_1, \ldots, m_r$, il est divisible par $\displaystyle\prod_{i=1}^{r}(X - \alpha_i)^{m_i}$
- En comptant les multiplicités, un polynôme a au plus autant de racines que son degré
- Polynômes scindés, scindés à racines simples
- *Sur un corps de caractéristique nulle*, α est racine de P de multiplicité m ssi $P(\alpha) = P'(\alpha) = \cdots = P^{(m-1)}(\alpha) = 0$ et $P^{(m)}(\alpha) \neq 0$.
- Exercice de cours : si $P \in \mathbb{R}[X]$ est scindé/scindé à racines simples, P' aussi.
- Corps algébriquement clos
- $\mathbb{C}$ est algébriquement clos (*démonstration hors-programme*)
- Description des polynômes irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$, dans $\mathbb{R}[X]$
- Factorisation d'un polynôme de $\mathbb{C}[X]$ ou de $\mathbb{R}[X]$ en produit d'irréductibles
- Polynômes d'interpolation de Lagrange

5 Questions de cours

- Une fonction dérivable est convexe ssi sa dérivée est croissante (*en admettant l'inégalité des pentes*)
- Inégalité arithmético-géométrique, par convexité
- Formule de Taylor formelle
- Calcul d'une division euclidienne/d'un PGCD/d'une relation de Bézout entre deux polynômes
- α est racine de P de multiplicité au moins m ssi $P(\alpha) = P'(\alpha) = \cdots = P^{(m-1)}(\alpha) = 0$.
- Si $P \in \mathbb{R}[X]$ est scindé/scindé à racines simples, P' aussi.