DM 10 – Théorème de d'Alembert-Gauss – Inégalité de Bernstein

1 Théorème de d'Alembert-Gauss

1. L'ensemble $\Big\{|P(z)|, z \in \mathbb{C}\Big\}$ est une partie non vide de $\mathbb{R}_+$, donc elle admet une borne inférieure.

2. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| \geq 1$. Par inégalité triangulaire inversée, on a

$$|P(z)| = |a_d z^d + \sum_{k=0}^{d-1} a_k z^k| \geq |a_d z^d| - |\sum_{k=0}^{d-1} a_k z^k|.$$

   Par inégalité triangulaire,

$$|\sum_{k=0}^{d-1} a_k z^k| \leq \sum_{k=0}^{d-1} |a_k||z|^k.$$

   Et donc :

$$|P(z)| \geq |a_d||z|^d - \sum_{k=0}^{d-1} |a_k||z|^k.$$

   Comme de plus $|z| \geq 1$, on a $|z|^k \leq |z|^{d-1}$ pour tout $k \in [\![0, d-1]\!]$. Donc,

$$|a_d||z|^d - \sum_{k=0}^{d-1} |a_k||z|^k \geq |a_d||z|^d - \sum_{k=0}^{d-1} |a_k||z|^{d-1} = |z|^{d-1}\Big(|a_d||z| - \sum_{k=0}^{d-1} |a_k|\Big).$$

3. Posons $R = \max(1, \dfrac{m+1+\sum_{k=0}^{d-1}|a_k|}{|a_d|})$. Si $|z| \geq 1$, on a donc $|z|^{d-1} \geq 1$ et $|a_d||z| - \sum_{k=0}^{d-1}|a_k| \geq m+1$. Donc, en utilisant la question précédente :

$$|P(z)| \geq |z|^{d-1}\Big(|a_d||z| - \sum_{k=0}^{d-1}|a_k|\Big) \geq 1 \times (m+1) = m+1.$$

4. Notons $A = \Big\{|P(z)|, z \in \mathbb{C}\Big\}$. Par caractérisation séquentielle de la borne inférieure, on peut trouver une suite $(u_n) \in A^{\mathbb{N}}$, de limite m. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on peut trouver $w_n \in \mathbb{C}$ telle que $|P(w_n)| = u_n$. Pour n suffisamment grand, on a $u_n < m+1$. Donc, d'après la question précédente, $|w_n| < R$ pour n assez grand.

   Par le théorème de Bolzano-Weirstrass, on peut extraire de (w_n) une sous-suite convergente, qu'on note (z_n). Comme la suite de terme général $|P(z_n)|$ est extraite de (u_n), elle converge aussi vers m.

5. *Il s'agit d'un résultat de continuité pour la fonction polynomiale P, vue de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$. Stricto sensu, on n'a pas défini de notion de continuité pour ces fonctions.*

Comme $P=\sum_{k=0}^{d} a_k X^k$, on a pour tout $n\in\mathbb{N}$: $P(z_n)=\sum_{k=0}^{d} a_k z_n^k$. Comme $z_n\to\alpha$, on a par opérations élémentaires sur les limites (*qu'on a données dans* $\mathbb{C}$),

$$\sum_{k=0}^{d} a_k z_n^k \to \sum_{k=0}^{d} a_k \alpha^k.$$

Donc, $P(z_n)\to P(\alpha)$, quand n tend vers $+\infty$. Par passage au module, $|P(z_n)|\to|P(\alpha)|$. Donc, par unicité de la limite, $m=|P(\alpha)|$.

6. Par la formule de Taylor en α, on a

$$P=\sum_{k=0}^{d}\frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!}(X-\alpha)^k.$$

Si pour tout $k\geq 1$, on avait $P^{(k)}(\alpha)=0$, on aurait alors $P=P(\alpha)$, ce qui est contraire l'hypothèse.

La partie $\{k\in\mathbb{N}^* \mid P^{(k)}(\alpha)\neq 0\}$ est donc une partie non vide de $\mathbb{N}$; elle admet donc un minimum.

7. En utilisant de nouveau la formule de Taylor et par définition de k_0, on a :

$$P=P(\alpha)+\sum_{k=k_0}^{d}\frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!}(X-\alpha)^k.$$

Soit $z\in\mathbb{C}$. On évalue en z et on réécrit un peu l'expression :

$$P(z)=P(\alpha)+\frac{P^{(k_0)}(\alpha)}{k_0!}(z-\alpha)^{k_0}\big(1+\sum_{k=k_0+1}^{d}\frac{k_0!}{k!}\frac{P^{(k)}(\alpha)}{P^{(k_0)}(\alpha)}(z-\alpha)^{k-k_0}\big).$$

On note $\varepsilon(z)$ la somme dans la parenthèse. Elle tend vers 0 quand z tend vers α (car toutes les puissances $k-k_0$ sont strictement positives). Ceci conclut.

8. On écrit $P^{(k_0)}(\alpha)=|P^{(k_0)}(\alpha)|e^{i\psi}$, où $\psi\in[0,2\pi[$. Soit $\phi\in[0,2\pi[$, soit $r\geq 0$; on écrit $z=\alpha+re^{i\phi}$. On a alors :

$$\frac{P^{(k_0)}(\alpha)}{k_0!}(z-\alpha)^{k_0}=\frac{|P^{k_0}(\alpha)|}{k_0!}e^{i\psi}r^{k_0}e^{ik_0\phi}.$$

En prenant ϕ tel que $\psi+k_0\phi\equiv\theta+\pi[2\pi]$, on a donc :

$$\frac{P^{(k_0)}(\alpha)}{k_0!}(z-\alpha)^{k_0}=-\frac{|P^{k_0}(\alpha)|}{k_0!}r^{k_0}e^{i\theta}.$$

Et donc : $P(\alpha)+\frac{P^{(k_0)}(\alpha)}{k_0!}(z-\alpha)^{k_0}=\big(m-\frac{|P^{(k_0)}(\alpha)|}{k_0!}r^{k_0}\big)e^{i\theta}$.

9. Soit $z=\alpha+re^{i\phi}$. Comme $\lim_{\alpha}\varepsilon=0$, si r est suffisamment petit, on a

$$|\varepsilon(z)|\leq\frac{1}{2}.$$

Par inégalité triangulaire et la question 7, on a :

$$|P(z)| \leq \left|P(\alpha) + \frac{P^{k_0}(\alpha)}{k_0!}(z-\alpha)^{k_0}\right| + \left|\frac{P^{k_0}(\alpha)}{k_0!}(z-\alpha)^{k_0}\right|\left|\varepsilon(z)\right|.$$

Le premier terme vaut $m - \frac{|P^{k_0}(\alpha)|}{k_0!}r^{k_0}$. Le deuxième terme est inférieur à $\frac{|P^{k_0}(\alpha)|}{2k_0!}r^{k_0}$ si r est suffisamment petit. Donc, pour r assez petit,

$$|P(z)| \leq m - \frac{|P^{(k_0)}(\alpha)|}{2k_0!}r^{k_0}.$$

Cette inégalité montre que, sur un demi-rayon partant de α, et suffisamment proche de α, $|P(z)|$ prend des valeurs strictement inférieures à m. C'est en contradiction avec la définition de m.

Donc, on a en fait $m = 0$ et α est une racine de P.

2 Inégalité de Bernstein

1. Soit $T \in \mathcal{T}_n$. Avec le mêmes notations que dans l'énoncé, on a

$$\forall t \in \mathbb{R}, T'(t) = \sum_{k=1}^{n} \big(kb_k \cos(kt) - ka_k \sin(kt)\big).$$

   Donc, $T' \in \mathcal{T}_n$.

2. Soit $T \in \mathcal{T}_n$. Comme T est une combinaison linéaire des fonctions $t \mapsto 1$ et des fonctions $t \mapsto \cos(kt)$ et $t \mapsto \sin(kt)$ (pour $k \in [\![1, n]\!]$), qui sont toutes 2π-périodiques, T est aussi 2π-périodique.
   De plus, pour tout $t \in \mathbb{R}$, avec les notations de l'énoncé :

$$|T(t)| \leq |a_0| + \sum_{k=1}^{n} |a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)| \leq |a_0| + \sum_{k=1}^{n} |a_k| + |b_k|,$$

   en utilisant l'inégalité triangulaire. Donc, les fonctions de $\mathcal{T}_n$ sont 2π-périodiques et bornées.

3. On a $P_\lambda(1) = P(\lambda) - P(\lambda) = 0$. Ainsi, 1 est racine de P_λ et donc $X - 1$ divise P_λ.

4. Par définition, $P_\lambda = (X-1)Q_\lambda$. On dérive :

$$P'_\lambda = Q_\lambda + (X-1)Q'_\lambda.$$

   En évaluant en 1 et on trouve $P'_\lambda(1) = Q_\lambda(1)$. De plus, $P'_\lambda = \lambda P'(\lambda X)$, donc $P'_\lambda(1) = \lambda P'(\lambda)$. D'où, $Q_\lambda(1) = \lambda P'(\lambda)$.

5. Notons λ le coefficient dominant de A. On a donc $A = \lambda \prod_{j=1}^{2n}(X - \alpha_j)$. En dérivant :

$$A' = \lambda \sum_{j=1}^{2n} \prod_{i \neq j}(X - \alpha_i).$$

Donc, $A'(\alpha_k) = \lambda \prod_{i\neq k}(\alpha_k - \alpha_i)$, pour tout $k \in [\![1, 2n]\!]$. Ainsi, $\dfrac{A}{(X-\alpha_k)A'(\alpha_k)}$ vaut $\prod_{i\neq k} \dfrac{X-\alpha_i}{\alpha_k - \alpha_i}$.
Donc,

$$\sum_{k=1}^{2n} B(\alpha_k)\frac{A}{(X-\alpha_k)A'(\alpha_k)} = \sum_{k=1}^{2n} B(\alpha_k)\prod_{i\neq k}\frac{X-\alpha_i}{\alpha_k-\alpha_i}.$$

Ceci est un polynôme de degré au plus $2n-1$ et il vaut $B(\alpha_k)$ en α_k, pour tout $k \in [\![1, 2n]\!]$. Comme $B \in \mathbb{C}_{2n-1}[X]$, il est égal à B. *On reconnait bien sûr les polynômes d'interpolation de Lagrange ; on peut directement utiliser ce que l'on sait de ces polynômes.*

6. Les racines de R sont les racines $2n$-èmes de -1. Comme $(e^{i\pi/2n})^{2n} = e^{i\pi} = -1$, les racines de R sont les ω_k. En particulier, R est scindé à racines simples.
On utilise la relation précédente avec Q_λ (de degré $\leq 2n-1$ car P_λ comme P est degré $\leq 2n$) dans le rôle de B et R dans le rôle de A :

$$Q_\lambda = \sum_{k=1}^{2n} Q_\lambda(\omega_k)\frac{X^{2n}+1}{(X-\omega_k)R'(\omega_k)}.$$

Soit $k \in [\![1, 2n]\!]$. Comme $Q_\lambda = \dfrac{P(\lambda X) - P(\lambda)}{X-1}$, $Q_\lambda(\omega_k) = \dfrac{P(\lambda\omega_k) - P(\lambda)}{\omega_k - 1}$. De plus, $R' = 2nX^{2n-1}$ et donc $R'(\omega_k) = 2n\omega_k^{2n-1} = -\dfrac{2n}{\omega_k}$ (car $\omega_k^{2n} = -1$). D'où l'identité :

$$Q_\lambda = -\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{2n}\frac{P(\lambda\omega_k) - P(\lambda)}{\omega_k - 1}\frac{X^{2n}-1}{X-\omega_k}\omega_k.$$

Pour la deuxième identité, on évalue la première en 1. Le membre de gauche vaut $Q_\lambda(1) = \lambda P'(\lambda)$. Celui de droite vaut

$$-\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{2n}\frac{P(\lambda\omega_k) - P(\lambda)}{\omega_k - 1}\frac{2}{1-\omega_k}\omega_k.$$

En découpant la somme en deux, on trouve bien

$$\lambda P'(\lambda) = \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{2n} P(\lambda\omega_k)\frac{2\omega_k}{(1-\omega_k)^2} - \frac{P(\lambda)}{2n}\sum_{k=1}^{2n}\frac{2\omega_k}{(1-\omega_k)^2}.$$

7. En appliquant cette identité à X^{2n} au lieu de P, on obtient :

$$\lambda \times 2n\lambda^{2n-1} = \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}\lambda^{2n}\omega_k^{2n}\frac{2\omega_k}{(1-\omega_k)^2} - \frac{\lambda^{2n}}{2n}\sum_{k=1}^{2n}\frac{2\omega_k}{(1-\omega_k)^2}.$$

Comme $\omega_k^{2n} = -1$, on a

$$2n\lambda^{2n} = -\frac{2\lambda^{2n}}{2n}\sum_{k=1}^{2n}\frac{2\omega_k}{(1-\omega_k)^2}.$$

Avec $\lambda = 1$, on a donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n}\frac{2\omega_k}{(1-\omega_k)^2} = -2n^2$. On peut ainsi remplacer la somme dans la deuxième identité de la question précédente :

$$\lambda P'(\lambda) = \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{2n} P(\lambda\omega_k)\frac{2\omega_k}{(1-\omega_k)^2} + nP(\lambda).$$

8. Soit $k \in [\![1, 2n]\!]$. On calcule :

$$\frac{2\omega_k}{(1-\omega_k)^2} = \frac{2e^{i\phi_k}}{(1-e^{i\phi_k})^2} = \frac{2e^{i\phi_k}}{(e^{i\phi_k/2})^2(e^{-i\phi_k/2}-e^{i\phi_k/2})^2} = \frac{2}{(2i\sin(-\phi_k/2))^2} = -\frac{1}{2\sin^2(\phi_k/2)}.$$

9. On écrit comme dans l'énoncé :

$$\forall t \in \mathbb{R}, T(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} \big(a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)\big).$$

Par les formules d'Euler,

$$\forall t \in \mathbb{R}, T(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} \big(a_k \frac{e^{ikt}+e^{-ikt}}{2} + b_k \frac{e^{ikt}-e^{-ikt}}{2i}\big) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikt}$$

avec $c_0 = a_0$, $c_k = \dfrac{a_k}{2} + \dfrac{b_k}{2i}$ pour $k \geq 1$ et $c_k = \dfrac{a_{|k|}}{2} - \dfrac{b_{|k|}}{2i}$ si $k \leq -1$. Donc,

$$\forall t \in \mathbb{R}, e^{int}T(t) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{i(k+n)t} = \sum_{\ell=0}^{2n} c_{\ell-n} e^{i\ell t}.$$

On pose $U = \sum\limits_{\ell=0} 2nc_{\ell-n}X^\ell$ et on a bien : $\forall t \in \mathbb{R}, e^{int}T(t) = U(e^{it})$.

10. On utilise l'identité de la question 7, avec $P = U$. On a donc

$$\lambda U'(\lambda) = \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{2n} U(\lambda\omega_k)\frac{2\omega_k}{(1-\omega_k)^2} + nU(\lambda).$$

Soit $t \in \mathbb{R}$, en prenant $\lambda = e^{it}$ et avec la question 8, on a :

$$e^{it}U'(e^{it}) = -\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{2n} U(e^{it+i\phi_k})\frac{1}{2\sin^2(\phi_k/2)} + nU(e^{it}).$$

En dérivant la relation $\forall t \in \mathbb{R}, e^{int}T(t) = U(e^{it})$, on a

$$\forall t \in \mathbb{R}, ine^{int}T(t) + e^{int}T'(t) = ie^{it}U'(e^{it}).$$

En remplaçant les expressions des U par celles avec des T, on a donc :

$$ne^{int}T(t) - ie^{int}T'(t) = -\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{2n} e^{in(t+\phi_k)}T(t+\phi_k)\frac{1}{2\sin^2(\phi_k/2)} + ne^{int}T(t).$$

Comme $n\phi_k = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, $e^{in\phi_k} = i(-1)^k$. En simplifiant (additivement) les $ne^{int}T(t)$, puis les $-ie^{int}$ en facteur, on obtient :

$$T'(t) = \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{2n} T(t+\phi_k)\frac{(-1)^k}{2\sin^2(\phi_k/2)}.$$

11. Soit $t \in \mathbb{R}$. Par inégalité triangulaire, on a

$$|T'(t)| \leq \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{2n} |T(t+\phi_k)| \frac{1}{2\sin^2(\phi_k/2)} \leq \frac{\|T\|_\infty}{2n} \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{2\sin^2(\phi_k/2)}.$$

Or, on sait que $\dfrac{1}{2\sin^2(\phi_k/2)} = -\dfrac{2\omega_k}{(1-\omega_k)^2}$ (question 8) et on a montré (question 7) que $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n} \frac{2\omega_k}{(1-\omega_k)^2} = 2n^2$. Donc,

$$|T'(t)| \leq \frac{\|T\|_\infty}{2n} \times 2n^2 = n\|T\|_\infty.$$

Comme c'est vrai pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a bien $\|T'\|_\infty \leq n\|T\|_\infty$.