

Semaine 14 - Polynômes – Algèbre linéaire

Nous ne sommes qu'au début de l'algèbre linéaire. Pas d'exercices traités pour l'instant. Pas de matrices/systèmes linéaires. Aucune notion sur les familles de vecteurs.

1 Polynômes

Tout le chapitre. Donc, programme de la semaine précédente + formules de Viète.

2 Algèbre linéaire

2.1 Généralités

- Espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K}$
- Vecteurs, scalaires
- Exemples basiques : $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}[X]$, $\mathcal{F}(A, E)$, où A ensemble et E espace vectoriel (cas particulier, $E = \mathbb{K}$; sous-cas particulier $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$).
- Règles de calcul
- Sous-espace vectoriel
- Familles de scalaires à support fini, combinaisons linéaires
- Espace vectoriel engendré par une partie, définition *par le haut* et description comme ensemble de combinaisons linéaires
- Application linéaire, endomorphisme, isomorphisme, automorphisme
- Image directe et image réciproque d'un sous-espace vectoriel
- $\mathcal{L}(E, F)$ est un espace vectoriel
- Linéarité de la pré-composition et de la post-composition
- $\mathcal{L}(E)$ est un anneau
- $\text{GL}(E)$ est un groupe; c'est le groupe des inversibles de $\mathcal{L}(E)$
- Noyau et image d'une application linéaire; caractérisations de l'injectivité et de la surjectivité

2.2 Décompositions d'un espace vectoriel

- Somme $F + G$ de deux sous-espaces vectoriels
- Somme directe, caractérisation
- Sous-espaces vectoriels supplémentaires; *lien avec un raisonnement par analyse/synthèse*
- Exemples : droite et plan vectoriels dans $\mathbb{R}^3$; fonctions paires et impaires; si $P \in \mathbb{K}[X]$ de degré d , idéal engendré par P et $\mathbb{K}_{d-1}[X]$ dans $\mathbb{K}[X]$

- Produit de deux espaces vectoriels
- Si $E = F \oplus G$, E est isomorphe à $F \times G$
- Si $E = E_1 \oplus E_2$, se donner une application linéaire de E dans F revient à se donner une application linéaire de E_1 dans F et une application linéaire de E_2 dans F . Et cette correspondance est linéaire.
- Généralisation rapide de ces notions et des résultats aux cas d'un nombre fini de sous-espaces
- Projecteur (ou projection) sur un ssev parallèlement à un ssev
- Caractérisation des projecteurs comme idempotents de $\mathcal{L}(E)$

Traité lundi :

- Symétrie par rapport à un ssev parallèlement à un ssev
- Caractérisation des symétries comme involutions de $\mathcal{L}(E)$

3 Questions de cours

- Formule de Taylor formelle
- Calcul d'une division euclidienne/d'un PGCD/d'une relation de Bézout entre deux polynômes
- α est racine de P de multiplicité au moins m ssi $P(\alpha) = P'(\alpha) = \dots = P^{(m-1)}(\alpha) = 0$.
- Si $P \in \mathbb{R}[X]$ est scindé/scindé à racines simples, P' aussi.
- Formules de Viète
- Si $E = F \oplus G$, E est isomorphe à $F \times G$
- Exemples de décompositions d'un espace en sommes de supplémentaires
- Caractérisation des projecteurs, des symétries (*pour les symétries, seulement à partir de mercredi*)