DS 5 de mathématiques

Durée : 4 heures. Les calculatrices et autres technologies sont interdites.

Si vous repérez une possible erreur d'énoncé, vous êtes invité(e) à venir le signaler.

1 Équation de Sturm-Liouville

Soit q une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On note (E_q) l'équation différentielle[1] de Sturm-Liouville suivante : $y'' + qy = 0$, d'inconnue y une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

On admet le *théorème de Cauchy linéaire* suivant :
Si $t_0 \in \mathbb{R}$ et si $y_0, v_0 \in \mathbb{R}$, il existe une *unique* solution y de E_q vérifiant les conditions initiales : $y(t_0) = y_0$ et $y'(t_0) = v_0$.

Le but du problème est l'étude qualitative des solutions de (E_q)·

1.1 Principe des zéros isolés

Soit y une solution non nulle de (E_q), soit α un point d'annulation de y. On souhaite montrer que α est un zéro isolé de y, au sens où

$$\exists \delta > 0 : \forall t \in \mathbb{R}, \big(|t-\alpha| < \delta \text{ et } t \neq \alpha\big) \implies y(t) \neq 0.$$

1. On raisonne par l'absurde. Montrer qu'on peut alors trouver une suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels de limite α telle que : $\forall n \in \mathbb{N}, t_n \neq \alpha$ et $y(t_n) = 0$.

2. En déduire que $y'(\alpha) = 0$. Conclure.

1.2 Une estimation dans le cas où $q < 0$

On suppose qu'il existe une constante $\omega > 0$ telle que $q \leq -\omega^2$ sur $\mathbb{R}$. On considère une solution y de (E_q) telle que $y(0) = y_0 > 0$ et $y'(0) = 0$.

3. Montrer que y^2 est convexe.

4. En déduire que $y \geq y_0$ sur $\mathbb{R}$.

[1] Par définition, y est solution de (E_q) si, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $y''(t) + q(t)y(t) = 0$.

5. Soit ϕ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\phi(0) = \phi'(0) = 0$.
   On note $g = \phi'' - \omega^2\phi$

   (a) Montrer que pour tout réel x, $\phi(x) = \dfrac{1}{\omega}\displaystyle\int_0^x g(t)\,\mathrm{sh}\big(\omega(x-t)\big)dt$.

   On note z la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $z(t) = y_0\,\mathrm{ch}(\omega t)$, $\phi = y - z$ et $g = \phi'' - \omega^2\phi$.

   (b) Montrer que $g = \phi'' - \omega^2\phi \geq 0$ sur $\mathbb{R}$.

   (c) En déduire que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $y(t) \geq y_0\,\mathrm{ch}(\omega t)$.

1.3 Quasi-périodicité des zéros dans le cas où $q > 0$.

On se donne deux fonctions f et g continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que $f < g$ sur $\mathbb{R}$. On note y une solution non nulle de (E_f) et z une solution de (E_g).

Soient α et β deux points d'annulation consécutifs de y – *ceci a bien un sens grâce à la partie 1.1.* On souhaite montrer[2] que z s'annule sur $[\alpha, \beta]$ et on raisonne par l'absurde. Sans perte de généralité, on peut supposer que y et z sont positives sur $[\alpha, \beta]$.

6. On définit $w = yz' - y'z$. Calculer w' et en déduire les variations de w.

7. Montrer que $y'(\alpha) > 0$ et $y'(\beta) < 0$. En déduire une contradiction.

Soient $\omega, \nu > 0$ des constantes, q une fonction continue telle que $\omega^2 < q < \nu^2$ sur $\mathbb{R}$.
Soit y une solution non nulle de (E_q).

8. Montrer que y s'annule une infinité de fois sur $\mathbb{R}$ et que si $\alpha < \beta$ sont deux zéros consécutifs de y, alors $\dfrac{\pi}{\nu} \leq \beta - \alpha \leq \dfrac{\pi}{\omega}$.
   On considèrera les solutions bien connues des équations (E_{ω^2}) et (E_{ν^2}).

2 Un théorème de Pólya

On fixe dans tout le problème un polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ unitaire de degré $n \geq 1$.

- On pose $\Omega_P = \{z \in \mathbb{C} \mid |P(z)| \leq 2\}$.
- On note $\mathcal{R}_P = \{\mathrm{Re}(z), z \in \Omega_P\}$ la projection orthogonale de Ω_P sur l'axe réel.

On se propose de démontrer que l'ensemble $\mathcal{R}_P$ peut être recouvert par un nombre fini de segments disjoints dont la somme des longueurs est ≤ 4. C'est un résultat démontré par George Pólya en 1928.

[2] C'est le théorème de comparaison de Sturm.

2.1 Exemples et résultats préliminaires

1. Montrer que l'ensemble Ω_P est non vide.

2. On suppose que $P = X^2 - 2$.
   Montrer que $\Omega_P \subset \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 2\}$. En déduire que $\mathcal{R}_P = [-2, 2]$.

3. On suppose que $P = X^2 - a$ avec $a \in \mathbb{R}$.
   Montrer que si $a > 2$, $\mathcal{R}_P$ n'est pas un intervalle.

4. **Deux résultats préliminaires sur les polynômes scindés sur $\mathbb{R}$.**
   Soit $R \in \mathbb{R}[X]$ de degré $n \geq 1$ scindé sur $\mathbb{R}$, $y_1 < y_2 < \ldots < y_p$ ses racines distinctes, et $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ leur multiplicité respective.

   (a) Montrer que R' est également scindé sur $\mathbb{R}$ et localiser ses racines.

   (b) En déduire que toute racine multiple de R' est racine de R.

   (c) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{y_1, \ldots, y_p\}$, $\dfrac{R'(x)}{R(x)} = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} \frac{\alpha_k}{x - y_k}$.

   (d) En déduire que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $R(x)R''(x) \leq R'(x)^2$.

2.2 Réduction au cas réel

On note $z_1, \ldots, z_n$ les racines complexes de P comptées avec multiplicité. Pour $i \in [\![1, n]\!]$, on note $x_i = \mathrm{Re}(z_i)$ et on considère le polynôme $Q = (X - x_1) \ldots (X - x_n) \in \mathbb{R}[X]$.
Pour tout polynôme $R \in \mathbb{R}[X]$, on note $E_R = \{x \in \mathbb{R} \mid |R(x)| \leq 2\}$.

5. Montrer que $\mathcal{R}_P \subset E_Q \subset \mathcal{R}_Q$.

6. (a) Montrer que l'on peut trouver $-\infty = u_0 < u_1 < \ldots < u_{p-1} < u_p = +\infty$ tels que la fonction polynomiale Q soit strictement monotone sur chaque intervalle $[u_k, u_{k+1}]$[3].

   (b) En déduire que E_Q est une réunion de segments deux à deux disjoints.

   On peut ainsi écrire $E_Q = I_1 \cup I_2 \cup \ldots \cup I_s$ avec pour tout $k \in [\![1, s]\!]$, $I_k = [a_k, b_k]$ et où, pour tout $k \in [\![1, s-1]\!]$, $a_k \leq b_k < a_{k+1}$ (les segments sont numérotés dans l'ordre croissant). On note $\mu(Q) = \displaystyle\sum_{k=1}^{s}(b_k - a_k)$ la somme des longueurs des intervalles I_k.

   (c) Montrer que pour tout $k \in [\![1, s]\!]$, $Q(a_k)$ et $Q(b_k)$ appartiennent à $\{-2, 2\}$ et que pour tout $k \in [\![1, s-1]\!]$, $Q(b_k) = Q(a_{k+1})$.

   (d) Préciser $Q(b_s)$ ainsi que $Q(a_1)$ en fonction de la parité de n.

[3] On convient que la notation $[u_k, u_{k+1}]$ désigne l'intervalle $]-\infty, u_1]$ si $k = 0$ et $[u_{p-1}, +\infty[$ si $k = p-1$

2.3 Réduction à un seul intervalle

7. On souhaite montrer que chaque intervalle I_k contient au moins une racine de Q.

   (a) Traiter le cas $Q(a_k) = -Q(b_k)$.

   On suppose dans la suite de la question (et par symétrie) que $Q(a_k) = Q(b_k) = 2$.

   (b) Justifier l'existence de $\alpha \in [a_k, b_k]$ tel que $Q(\alpha) = \inf\limits_{x \in I_k} Q(x)$.

   (c) Montrer que $Q'(\alpha) = 0$ et $Q''(\alpha) \geq 0$.

   (d) Conclure, en utilisant la question 4.

8. On note $t_1, \ldots, t_m$ les racines de Q dans l'intervalle I_s, ces racines étant comptées avec multiplicité. On suppose $m < n$ (et donc $s > 1$) et on définit

   $$A = (X - t_1)\ldots(X - t_m) \quad \text{et} \quad B \in \mathbb{R}[X] \text{ tel que } Q = AB.$$

   On pose enfin $Q_1(X) = A(X+d)B(X)$ où $d = a_s - b_{s-1}$ est l'écart entre les intervalles I_{s-1} et I_s.

   (a) Vérifier que Q_1 est unitaire de degré n et scindé sur $\mathbb{R}$.

   (b) Montrer que $I_1 \cup I_2 \cup \ \ldots \cup I_{s-1} \subset E_{Q_1}$ et que

   $$[a_s - d, b_s - d] = [b_{s-1}, b_s - d] \subset E_{Q_1}.$$

   (c) En déduire que $\mu(Q_1) \geq \mu(Q)$ et que l'intervalle le plus à droite de E_{Q_1} contient strictement plus de m racines de Q_1.

9. En déduire qu'il existe un polynôme $\widetilde{Q} \in \mathbb{R}[X]$ unitaire de degré n, scindé sur $\mathbb{R}$, tel que $\mu(\widetilde{Q}) \geq \ \mu(Q)$ et pour lequel $E_{\widetilde{Q}}$ est réduit à un unique segment.

2.4 Conclusion *via* les polynômes de Tchebychev

On admet l'existence d'une suite de polynômes $(T_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, T_n est de degré n, de coefficient dominant 2^{n-1} et, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$.

10. Déterminer les points $x \in [-1, 1]$ tels que $|T_n(x)| = 1$.

11. Soit $R \in \mathbb{R}[X]$ unitaire de degré $n \geq 1$. En considérant le polynôme $R - \dfrac{T_n}{2^{n-1}}$, montrer que $\sup\limits_{x \in [-1,1]} |R(x)| \geq \dfrac{1}{2^{n-1}}$.

12. En déduire que si $R \in \mathbb{R}[X]$ est unitaire de degré $n \geq 1$ et vérifie $|R(x)| \leq 2$ pour tout $x \in [a, b]$, alors $b - a \leq 4$.

13. Conclure.