DS 5 de mathématiques – Corrigé

1 Équation de Sturm-Liouville

1.1 Principe des zéros isolés

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère $\delta_n = \dfrac{1}{n+1}$. Comme α n'est pas un zéro isolé de y par l'absurde, on peut trouver $t_n \in \mathbb{R}$ tel que $t_n \neq \alpha$, $|t_n - \alpha| < \delta_n$ et $y(t_n) = 0$. Comme $\delta_n \to 0$, $t_n \to \alpha$, donc la suite (t_n) convient.

2. Par définition, quand $t \to \alpha$, avec $t \neq \alpha$, on a $\dfrac{y(t) - y(\alpha)}{t - \alpha} \to y'(\alpha)$. En substituant t_n à t, comme $t_n \to \alpha$, on en déduit que $0 = \dfrac{y(t_n) - y(\alpha)}{t_n - \alpha} \to y'(\alpha)$, donc $y'(\alpha) = 0$.
La fonction y est donc une solution de (E_q) vérifiant $y(\alpha) = 0$ et $y'(\alpha) = 0$. Comme la fonction nulle est aussi une telle solution, elles sont égales, par unicité dans le théorème de Cauchy linéaire. Donc, $y = 0$, ce qui contredit les hypothèses.

1.2 Une estimation dans le cas où $q < 0$

3. Comme y est de classe $\mathcal{C}^2$, y^2 aussi par opérations élémentaires. On calcule :
$$(y^2)' = 2yy' \text{ et donc} (y^2)'' = 2y'^2 + 2yy'' = 2(y'^2 - qy^2).$$
Comme $q \leq 0$ et qu'un carré est positif, $(y^2)'' \geq 0$, donc y^2 est une fonction convexe.

4. Comme y^2 est convexe, on sait que son graphe est toujours au-dessus de ses tangentes. Plus formellement, en utilisant la tangente en 0 :
$$\forall t \in \mathbb{R}, y^2(t) \geq y^2(t_0) + (t - t_0)(y^2)'(0).$$
Comme $(y^2)'(0) = 2y(0)y'(0) = 0$, on a $y^2(t) \geq y_0^2$ pour tout réel t. Ainsi, pour tout réel t, $|y(t)| \geq y_0$. Ceci montre en particulier que y ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$; donc, par le TVI, elle est de signe constant. Comme y est positif en 0, elle est donc toujours positive. Finalement, $y(t) \geq y_0$ sur $\mathbb{R}$.

5. Soit ϕ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\phi(0) = \phi'(0) = 0$. On note $g = \phi'' - \omega^2\phi$

(a) D'une part, par IPP en dérivant sh,

$$\int_0^x \phi''(t)\,\mathrm{sh}\big(\omega(x-t)\big)dt = \big[\phi(t)\,\mathrm{sh}\big(\omega(x-t)\big)\big]_{t=0}^{t=x} + \omega\int_0^x \phi'(t)\,\mathrm{ch}\big(\omega(x-t)\big)dt$$

$$= \phi(x)\times 0 - \phi'(0)\,\mathrm{sh}(x) + \omega\int_0^x \phi'(t)\,\mathrm{ch}\big(\omega(x-t)\big)dt$$

$$\int_0^x \phi''(t)\,\mathrm{sh}\big(\omega(x-t)\big)dt = \omega\int_0^x \phi'(t)\,\mathrm{ch}\big(\omega(x-t)\big)dt$$

car $\phi'(0)=0$. D'autre part, par IPP en intégrant sh,

$$\int_0^x \phi(t)\,\mathrm{sh}\big(\omega(x-t)\big)dt = -\frac{1}{\omega}\big[\phi(t)\,\mathrm{ch}\big(\omega(x-t)\big)\big]_{t=0}^{t=x} + \frac{1}{\omega}\int_0^x \phi'(t)\,\mathrm{ch}\big(\omega(x-t)\big)dt$$

$$= -\frac{\phi(x)}{\omega} + \frac{1}{\omega}\int_0^x \phi'(t)\,\mathrm{ch}\big(\omega(x-t)\big)dt$$

car $\phi(0)=0$. Donc,

$$\frac{1}{\omega}\int_0^x g(t)\,\mathrm{sh}\big(\omega(x-t)\big)dt$$

$$= \int_0^x \phi'(t)\,\mathrm{ch}\big(\omega(x-t)\big)dt - \omega\Big(-\frac{\phi(x)}{\omega} + \frac{1}{\omega}\int_0^x \phi'(t)\,\mathrm{ch}\big(\omega(x-t)\big)dt\Big)$$

$$= \phi(x).$$

(b) Par hypothèse, $y''=-qy$. De plus, un calcul direct donne $z''=\omega^2 z$. Donc, $g=-qy-\omega^2 z-\omega^2 y+\omega^2 z=-(q+\omega^2)y\geq 0$ car $y\geq 0$ et $q+\omega^2\leq 0$.

(c) On a $y(0)=y_0=z(0)$ et $y'(0)=0=z'(0)$ car $z' : t\mapsto \omega y_0\,\mathrm{sh}(\omega t)$. Donc, ϕ vérifie $\phi(0)=\phi'(0)=0$. Par la question (a), on a donc :

$$\phi(x)=\frac{1}{\omega}\int_0^x g(t)\,\mathrm{sh}\big(\omega(x-t)\big)dt.$$

On sait que $g\geq 0$ sur $\mathbb{R}$. Si $x\geq 0$ et $t\in[0,x]$, $\mathrm{sh}\big(\omega(x-t)\big)\geq 0$ car $x-t\geq 0$. Par positivité de l'intégrale, on en déduit alors que $\phi(x)\geq 0$. Si $x\leq 0$ et $t\in[x,0]$, $\mathrm{sh}\big(\omega(x-t)\big)\leq 0$ car $x-t\leq 0$. Mais comme $x<0$ et que l'intégrale va de x à 0, on a encore $\phi(x)\geq 0$.
Donc, $\phi\geq 0$ sur $\mathbb{R}$, ce qui revient à : $\forall t\in\mathbb{R}, y(t)\geq y_0\,\mathrm{ch}(\omega t)$.

1.3 Quasi-périodicité des zéros dans le cas où $q>0$.

6. On a

$$w'=y'z'+yz''-y'z'-y''z=yz''-y''z=y(-gz)-(-fy)z=(f-g)yz.$$

Comme on a supposé $f<g$ et $y,z\geq 0$, on en déduit que $w'\leq 0$. Donc, w est décroissante sur $\mathbb{R}$.

7. Par définition, $y'(\alpha)$ est la limite de $\dfrac{y(t)-y(\alpha)}{t-\alpha}$ quand $t \to \alpha$, avec $t \neq \alpha$. En se limitant à des $t \in]\alpha, b]$, on a par hypothèse $y(t) \geq 0$ et donc $\dfrac{y(t)-y(\alpha)}{t-\alpha} = \dfrac{y(t)}{t-\alpha} \geq 0$. Donc, $y'(\alpha) \geq 0$ en passant à la limite. Comme de plus, $y(\alpha) = 0$, $y'(\alpha)$ ne peut pas valoir 0 (unicité dans le problème de Cauchy, comme à la question 2.). Donc, $y'(\alpha) > 0$.
   Le raisonnement pour $y'(\beta) < 0$ est identique en considérant les $t < \beta$.
   On calcule $w(\alpha) = -y'(\alpha)z(\alpha)$ et $w(\beta) = -y'(\beta)z(\beta)$. Comme $z > 0$ sur $[\alpha, \beta]$, on en déduit que $w(\alpha) < 0$ et $w(\beta) > 0$; ceci contredit la décroissance de w sur $\mathbb{R}$. Donc, z s'annule sur $[\alpha, \beta]$.

8. Pour tout réel T, la fonction $z_T : t \mapsto \sin\big(\omega(t-T)\big)$ est solution de l'équation (E_{ω^2}). De plus, par hypothèse, $\omega^2 < q$. Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, les points d'annulation de z_T sont les $T + \dfrac{k\pi}{\omega}$. En prenant p. ex. $T = 0$, la question précédente montre alors qu'il existe un zéro de y sur tout intervalle $[\dfrac{k\pi}{\omega}, \dfrac{(k+1)\pi}{\omega}]$; il y en a donc une infinité.
   Notons α un zéro de y et $\beta > \alpha$ le zéro suivant. Si $\varepsilon > 0$, la fonction $z_{\alpha+\varepsilon}$ s'annule en $\alpha + \varepsilon$ et $\alpha + \varepsilon + \dfrac{\pi}{\omega}$. Donc, y s'annule sur $[\alpha + \varepsilon, \alpha + \varepsilon + \dfrac{\pi}{\omega}]$. Comme ce point d'annulation n'est pas α, on a $\beta \leq \alpha + \varepsilon + \dfrac{\pi}{\omega}$; comme c'est vrai pour tout $\varepsilon > 0$, on a $\beta - \alpha \leq \dfrac{\pi}{\omega}$ en passant à la limite.
   De plus, si par l'absurde on avait $\beta - \alpha < \dfrac{\pi}{\nu}$, comme $q < \nu^2$, la fonction $w : t \mapsto \sin(\nu t)$ solution de (E_{ν^2}) devrait s'annuler sur l'intervalle $[\alpha, \beta]$; mais deux points d'annulation consécutifs quelconques de w sont à distance $\dfrac{\pi}{\nu}$; c'est absurde.

2 Un théorème de Pólya

2.1 Exemples et résultats préliminaires

1. Par le théorème de d'Alembert-Gauss, comme P n'est pas constant, il admet au moins une racine z_0. Alors, $|P(z_0)| \leq 2$ et donc $z_0 \in \Omega_P$.

2. Soit $z \in \Omega_P$. On a donc $|z^2 - 2| \leq 2$. Par inégalité triangulaire, $|z^2| \leq |z^2-2| + 2 \leq 4$ et donc $|z| \leq 2$.
   En particulier, si $z \in \Omega_P$, $|\mathrm{Re}(z)| \leq |z| \leq 2$, donc $\mathcal{R}_P \subset [-2, 2]$. Réciproquement, si $x \in [-2, 2]$, $x^2 \in [0, 4]$ et donc $|x^2 - 2| \leq 2$. Ainsi, $x \in \Omega_P$. Comme x est réel, on a même $x \in \mathcal{R}_P$, d'où l'inclusion réciproque, et l'égalité $\mathcal{R}_P = [-2, 2]$.

3. Soit $z = iy$, avec $y \in \mathbb{R}$. Alors, $|P(z)| = |a + y^2| = a + y^2$ car a et y^2 sont positifs. Ainsi, $|P(z)| \geq a > 2$. Ceci montre que $z \notin \Omega_P$; comme y est quelconque, $0 \notin \mathcal{R}_P$ (0 n'est pas la partie réelle d'un élément de Ω_P).

Cependant, $P(\pm\sqrt{a}) = 0$ et donc, $\pm\sqrt{a} \in \mathcal{R}_P$ (ils sont leur propre partie réelle). Ainsi, $\mathcal{R}_P$ n'est pas une partie convexe de $\mathbb{R}$ et donc pas un intervalle.

4. **Deux résultats préliminaires sur les polynômes scindés sur** $\mathbb{R}$.

   (a) On sait que R' a pour racines $y_1, \dots, y_p$ avec multiplicité $\alpha_1 - 1, \dots, \alpha_p - 1$ (en convenant que racine de multiplicité 0 signifie *pas racine*). De plus, le théorème de Rolle appliqué à R sur chaque intervalle $[y_i, y_{i+1}]$ (R est de classe $\mathcal{C}^1$ et s'annule aux bornes de cet intervalle) montre l'existence d'une racine $\beta_i \in]y_i, y_{i+1}[$ pour R'. Ainsi, en comptant les multiplicités, on a localisé $\displaystyle\sum_{k=1}^{p}(\alpha_k - 1) + p - 1 = n - 1 = \deg R'$ racines pour R' ; en effet $\displaystyle\sum_{k=1}^{p}\alpha_k = n$ car R est supposé scindé. Donc, R' est également scindé.

   (b) Avec les notations de la question précédente, les racines de R' qui ne sont pas déjà racines de R sont les β_i ; celles-ci sont nécessairement de multiplicité 1 car on a déjà localisé toutes les racines de R' (en comptant les multiplicités). Donc, une racine multiple de R' est déjà racine de R.

   (c) Par hypothèse, on peut écrire $R = \displaystyle\prod_{k=1}^{p}(X - y_k)^{\alpha_k}$. On peut dériver ce produit de proche en proche (récurrence immédiate) et obtenir

   $$R' = \sum_{k=1}^{p}\alpha_k(X - y_k)^{\alpha_k - 1}\prod_{\substack{1\leq i\leq p\\ i\neq k}}(X - y_i)^{\alpha_i}.$$

   En évaluant en un x distinct des y_i, on a donc :

   $$R'(x) = \sum_{k=1}^{p}\alpha_k\frac{R(x)}{x - y_k}.$$

   On conclut en divisant par $R(x)$.
   On peut aussi considérer la fonction $f(x) = \ln|R(x)|$ dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{y_1, \dots, y_p\}$ et dont la dérivée est $\dfrac{R'(x)}{R(x)}$.

   (d) Si x est un des y_i, le membre de gauche est nul et celui de droite est positif ; donc la relation est vérifiée.
   On suppose désormais que $x \in \mathbb{R}\backslash\{y_1, \dots, y_p\}$. En dérivant la relation précédente, on a :

   $$\frac{R''(x)R(x) - R'(x)^2}{R(x)^2} = -\sum_{k=1}^{p}\frac{\alpha_k}{(x - y_k)^2}.$$

   Le membre de droite est négatif, le dénominateur du membre de gauche positif. Donc, si $x \in \mathbb{R}\setminus\{y_1, \dots, y_p\}$, $R''(x)R(x) - R'(x)^2 \leq 0$.

2.2 Réduction au cas réel

5. Soit $x \in E_Q$. Alors, x est réel et vérifie $\prod_{k=1}^{n} |x - x_k| \leq 2$. Donc, x est dans Ω_Q et, comme il est réel, il est sa propre partie réelle donc il est dans $\mathcal{R}_Q$; d'où l'inclusion de droite.
   Soit $x \in \mathcal{R}_P$. On peut donc trouver $z \in \Omega_P$ tel que $x = \mathrm{Re}(z)$. Ce z vérifie $|P(z)| \leq 2$, c'est-à-dire :
   $$\prod_{k=1}^{n} |z - z_k| \leq 2.$$
   Or, pour tout k, $|x - x_k| = |\mathrm{Re}(z - z_k)| \leq |z - z_k|$. Donc,
   $$\prod_{k=1}^{n} |x - x_k| \leq \prod_{k=1}^{n} |z - z_k| \leq 2.$$
   Ainsi, $x \in E_Q$; d'où l'inclusion de gauche.

6. (a) La fonction Q est polynomiale donc elle est dérivable sur $\mathbb{R}$. Comme Q' est aussi une fonction polynomiale, elle a un nombre fini de points d'annulation sur $\mathbb{R}$; entre deux points d'annulation, elle est de signe constant par le TVI. On peut ainsi noter $u_1 < u_2 < \cdots < u_{p-1}$ les points d'annulation de Q'. Comme Q' est de signe constant entre deux de ces points (et aussi avant u_1 et après u_{p-1}), Q est strictement monotone sur chaque intervalle $[u_k, u_{k+1}]$ (y compris $]-\infty, u_1]$ et $[u_{p-1}, +\infty[$).
   Il n'y a pas besoin de considérer uniquement les u_k en lesquels Q change de monotonie, mais on peut le faire.

   (b) Pour $k \in [\![0, p-1]\!]$, on note $I_k = [u_k, u_{k+1}] \cap E_Q$ (avec les conventions de notation de l'énoncé). Si x et y sont dans I_k, on a $|Q(x)| \leq 2$ et $|Q(y)| \leq 2$. Par monotonie de Q sur $[u_k, u_{k+1}]$, on a encore $|Q(z)| \leq 2$ si $z \in [x, y]$. Ceci montre que I_k est un intervalle.
   De plus, cet intervalle est borné : il n'y a rien à montrer si $k \neq 0, p-1$ et dans ces deux cas, on utilise le fait que Q a pour limite $\pm\infty$ en $\pm\infty$.
   Enfin, cet intervalle est fermé. En effet, si $(x_n) \in I_k^{\mathbb{N}}$ est une suite tendant vers une des bornes x de I_k, on a $|Q(x_n| \leq 2$ pour tout n et donc $|Q(x)| \leq 2$ par passage à la limite.

   Comme $E_Q = \bigcup_{k=0}^{p-1} I_k$, est une réunion finie de segments. Quitte à réunir ensemble les segments qui se touchent (nécessairement en un u_k) (et éventuellement à enlever les segments vides), on a montré que E_Q est une réunion finie de segments deux à deux disjoints.

(c) Soit $k \in [\![1, s]\!]$. Supposons par l'absurde que $|Q(a_k)| \neq 2$. Comme par hypothèse, $|Q(a_k)| \leq 2$, on a l'inégalité stricte $|Q(a_k)| < 2$; par continuité, si x est assez proche de a_k, $|Q(x)| \leq 2$ et donc $x \in E_Q$. Mais ceci contredit la définition de I_k : les points à gauche de a_k et suffisamment proches de a_k ne sont pas dans E_Q. De même, pour $Q(b_k)$.
Soit $k \in [\![1, s-1]\!]$. Si on avait $Q(b_k) \neq Q(a_{k+1})$, l'un serait égal à 2 et l'autre à -2. Par le TVI, Q s'annulerait donc en un point $x_0 \in]b_k, a_{k+1}[$; ce point x_0 serait donc dans E_Q, ce qui contredit de nouveau le fait qu'il n'y a pas de point de E_Q entre b_k et a_{k+1}.

(d) Comme Q est unitaire, il tend vers $+\infty$ en $+\infty$. Comme Q ne s'annule pas après b_s et que $Q(b_s) = \pm 2$, on doit avoir $Q(b_s) = 2$ par le TVI.
La limite de Q en $-\infty$ est $+\infty$ si n est pair et $-\infty$ si n est impair. De nouveau, comme Q ne s'annule pas avant a_1 et que $Q(a_1) = \pm 2$, on en déduit que : $Q(a_1) = 2$ si n est pair et $Q(a_1) = -2$ si n est impair.

2.3 Réduction à un seul intervalle

7. (a) Dans ce cas, parmi $Q(a_k)$ et $Q(b_k)$, l'un vaut 2 et l'autre -2, donc par le TVI, Q s'annule sur I_k.

(b) Par le théorème des bornes atteintes, Q est minorée sur $[a_k, b_k]$ et atteint son minimum, en un point qu'on note α.

(c) Le point α est intérieur à $[a_k, b_k]$. En effet, sinon, cela signifierait que 2 est le minimum de Q sur $[a_k, b_k]$, donc comme $|Q| \leq 2$ sur $[a_k, b_k]$, Q serait constante égale à 2 sur $[a_k, b_k]$, ce qui est absurde. Comme $\alpha \in]a_k, b_k[$ et que Q y réalise un minimum local, $Q'(\alpha) = 0$. La formule de Taylor appliquée à Q en α donne

$$Q(x) = Q(\alpha) + \sum_{k=2}^{n} \frac{Q^{(k)}(\alpha)}{k!}(x - \alpha^k) = Q(\alpha) + \frac{Q''(\alpha)}{2}(x-\alpha)^2 + o((x-\alpha)^2),$$

quand $x \to \alpha$. Si on avait $Q''(\alpha) < 0$, on aurait un équivalent $Q(x) - Q(\alpha) \sim \dfrac{Q''(\alpha)}{2}(x-\alpha)^2$ quand $x \to \alpha$ et donc $Q(x) - Q(\alpha)$ serait strictement négatif sur un voisinage de α, ce qui contredit le fait que Q réalise un minimum en α. Donc, $Q''(\alpha) \geq 0$.

(d) Par la question 4.(d), comme Q est scindé, on a $Q''(\alpha)Q(\alpha) - Q'(\alpha)^2 = Q''(\alpha)Q(\alpha) \leq 0$. Il y a alors deux cas :

- Ou bien $Q''(\alpha) > 0$, alors $Q(\alpha) \leq 0$. En appliquant le TVI entre α et b_k, on trouve un point d'annulation de Q sur I_k.
- Ou bien $Q''(\alpha) = 0$. Mézalor, α est racine multiple de Q', donc est racine de Q par la question 4.(b), ce qui conclut.

8. (a) Les polynômes A et B sont unitaires. Par composition, $A(X+d)$ est unitaire donc $Q_1(X)$ aussi par produit. De plus, A et B sont scindés (ils divisent Q qui est scindé) ; donc $A(X+d)$ est scindé (il vaut $\prod_{k=1}^{m}(X-(t_k-d))$), donc $Q_1 = A(X+d)B$ aussi.

   (b) Soit $k \in [\![1, s-1]\!]$, soit $x \in I_k$. On a donc $|Q(x)| \leq 2$ et x est une racine de B (car il n'est pas dans I_s). On remarque que :

$$|A(x+d)| = \prod_{k=1}^{m} |x-(t_k-d)| \leq \prod_{k=1}^{m} |x-t_k| = |A(x).$$

   En effet, $x \leq b_{s-1} \leq t_k - d < t_k$ et donc la distance de x à $(t_k - d)$ est inférieur à la distance de x à t_k. Ainsi, $|Q_1(x)| = |A(x+d)||B(x)| \leq |A(x)||B(x)| = |Q(x)| \leq 2$. Donc, $x \in E_{Q_1}$.

   L'égalité $[a_s - d, b_s - d] = [b_{s-1}, b_s - d]$ vient de la définition de d. Si $x \in [b_{s-1}, b_s - d]$, alors $x + d \in [a_s, b_s]$. On écrit $B = \prod_{k=1}^{n-m}(X - u_k)$. Alors,

$$|B(x)| = \prod_{k=1}^{n-m} |x-u_k| \leq \prod_{k=1}^{n-m} |x+d-u_k| = |B(x+d)|.$$

   En effet, on a $u_k \leq b_{s-1} \leq x < x+d$, de sorte que la distance de u_k à x est inférieure à la distance de u_k à $x+d$. On a donc : $|Q_1(x)| = |A(x+d)||B(x)| \leq |A(x+d)||B(x+d)| \leq 2$ car $x+d \in I_s$. Donc, $x \in E_{Q_1}$.

   (c) Notons déjà que $J = I_{s-1} \cup [a_s - d, b_s - d] = [a_{s-1}, b_s - d]$ est un intervalle. D'après la question précédente, E_{Q_1} contient les intervalles $I_1, \ldots, I_{s-2}$ et J qui sont deux à deux disjoints. Donc, $\mu(Q_1) \geq \sum_{k=1}^{s-2}(b_k - a_k) + b_s - d - a_{s-1}$. La somme vaut $\mu(Q) - (b_{s-1} - a_{s-1}) - (b_s - a_s)$. Comme $d = a_s - b_{s-1}$, on a finalement $\mu(Q_1) \geq \mu(Q)$.
   L'intervalle J contient au moins une racine de Q_1 (car il y a une racine de B dans I_{s-1}) et il m racines dans $[a_s - d, b_s - d]$ (les m racines de A qui ont été translatées). Donc, le nombre de racines de Q_1 dans J est strictement supérieur à m.

   Enfin, J est bien l'intervalle le plus à droite de E_{Q_1}. En effet, on a montré que tous les intervalles de E_{Q_1} contenaient une racine de Q_1 et les racines de Q_1 sont les racines de B et les $t_k - d \leq b_s - d$.

9. On définit récursivement une suite finie de polynômes de la façon suivante :

- $Q_0 = Q$;
- Si Q_k a été défini et que l'intervalle le plus à droite de E_{Q_k} contient strictement moins de n racines, $Q_{k+1} = (Q_k)_1$ (notations de la question précédente) ;
- Si Q_k a été défini et que l'intervalle le plus à droite de E_{Q_k} contient n racines, on s'arrête et on note $\widetilde{Q}$ ce polynôme.

Tous les polynômes ainsi construits sont unitaires de degré n et scindés sur $\mathbb{R}$ par la question 8.a). De plus, d'après la question précédente, le nombre de racines de l'intervalle le plus à droite de $E_{Q_{k+1}}$ est strictement plus grand que le nombre de racines de l'intervalle le plus à droite E_{Q_k} ; comme ce nombre est majoré par n, le processus doit finir. De plus, on a $\mu(Q) \leq \mu(Q_1) \leq \cdots \leq \mu(\widetilde{Q})$.
Enfin, $E_{\widetilde{Q}}$ est composé d'un unique segment puisque l'intervalle le plus à droite de $E_{\widetilde{Q}}$ contient les n racines de $\widetilde{Q}$ et qu'on a vu que chaque segment de $E_{\widetilde{Q}}$ devait contenir au moins une racine de $\widetilde{Q}$.

2.4 Conclusion *via* les polynômes de Tchebychev

10. Soit $x \in [-1, 1]$. On écrit $x = \cos(\theta)$ avec $\theta \in [0, \pi]$. Alors, on a

$$|T_n(x)| = 1 \iff \cos(n\theta) = \pm 1 \iff n\theta \equiv 0[\pi] \iff \theta \equiv 0[\pi/n].$$

Ainsi, $T_n(x) = \pm 1$ ssi x est égal à l'un des $y_k = \cos(k\pi/n)$, où $k \in [\![0, n]\!]$.

11. On suppose par l'absurde que $\sup\limits_{x\in[-1,1]} |R(x)| < \frac{1}{2^{n-1}}$. On a donc, pour tout $x \in [-1, 1]$, $|R(x)| < \frac{1}{2^{n-1}}$. Posons $Q = R - \frac{T_n}{2^{n-1}}$. Comme R et $\frac{T_n}{2^{n-1}}$ sont unitaires de degré n, $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$.

Soit $k \in [\![0, n]\!]$. On a $Q(y_k) = R(y_k) - \frac{T_n(y_k)}{2^{n-1}} = R(y_k) + \frac{(-1)^{k+1}}{2^{n-1}}$. Si $k + 1$ est pair, on en déduit que $Q(y_k) > 0$ (car $R(y_k) > \frac{-1}{2^{n-1}}$). De même, si $k + 1$ est impair, on a $Q(y_k) < 0$.

Ainsi, Q prend des valeurs alternativement strictement négatives et strictement positives en les y_k. Donc, par le théorème des valeurs intermédiaires, Q a une racine sur chaque intervalle $[y_k, y_{k+1}]$, pour $k \in [\![0, n-1]\!]$. Comme Q est de degré $\leq n - 1$ et qu'il a au moins n racines, Q est nul. Donc $R = \frac{T_n}{2^{n-1}}$, ce qui contredit l'hypothèse puique $|\frac{T_n}{2^{n-1}}|$ prend la valeur $\frac{1}{2^{n-1}}$ (en n'importel quel y_k)

On conclut finalement que $\sup\limits_{x\in[-1,1]} |R(x)| \geq \frac{1}{2^{n-1}}$

12. Soit R un tel polynôme. Alors, le polynôme $R_2 = R\big(b + \frac{(b-a)}{2}(X-1)\big)$ a pour coefficient dominant $\frac{(b-a)^n}{2^n}$ et satisfait $|R_2(x)| \leq 2$ sur $[-1,1]$ (*on a composé R par le polynôme affine valant -1 en a et 1 en b.*)
Ainsi, $R_3 = \frac{2^n}{(b-a)^n}$ est unitaire de degré n et il vérifie $|R_3(x)| \leq \frac{2^{n+1}}{(b-a)^n}$ sur $[-1,1]$.
Par la question précédente, $\frac{1}{2^{n-1}} \leq \frac{2^{n+1}}{(b-a)^n}$. On en déduit que $(b-a)^n \leq 2^{2n}$ et donc $b-a \leq 4$.

13. Rassemblons les pièces.
    - On part d'un polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ unitaire de degré n.
    - Dans 2.2, on définit un polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$ unitaire de degré n et scindé, et tel que $\mathcal{R}_P \subset E_Q$.
    - Dans 2.3, on définit un polynôme $\widetilde{Q} \in \mathbb{R}[X]$ unitaire de degré n et scindé et tel que $\mu(\widetilde{Q}) \geq \mu(Q)$.
    - Le polynôme $\widetilde{Q}$ vérifie $|\widetilde{Q}|(x) \leq 2$ sur un intervalle de longueur $\mu(\widetilde{Q})$; par la question précédente, $\mu(\widetilde{Q}) \leq 4$.
    - Donc, on a aussi $\mu(Q) \leq 4$.
    - Comme $\mathcal{R}_P \subset E_Q$, $\mathcal{R}_P$ peut être recouvert par l'union finie d'intervalles E_Q, dont la somme des longueurs est $\mu(Q) \leq 4$. Ce qui conclut.