Systèmes linéaires et matrices

1 Pratique du pivot

EXERCICE 1. ◐○○ *Systèmes linéaires*
Résoudre les systèmes linéaires suivants.

1. $\begin{cases} 2x+3y-z=-1 \\ x+2y+3z=2 \\ 3x+4y-5z=-4 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x+2y-z+3t=2 \\ -2x-4y+2z+t=3 \\ 3x+6y-3z+2t=1 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 4x+3y=2 \\ 2x+y=5 \\ 3x+2y=2 \end{cases}$

4. $\begin{cases} u+w=1 \\ v+w=0 \\ u+v=1 \\ 2u+3v=0 \end{cases}$

EXERCICE 2. ♣ – ●○○ *Systèmes linéaires à paramètres*
Soit a, b, m des réels. Résoudre les systèmes suivants, en discutant selon les valeurs des paramètres.

1. $\begin{cases} 3x+y-z=-1 \\ 5x+2y-2z=a \\ 4x+y-z=b \end{cases}$

2. $\begin{cases} mx+y+z=1 \\ x+my+z=m \\ x+y+mz=1 \\ x+y+z=m \end{cases}$

3. $\begin{cases} ax+y+z=1 \\ x+ay+z=1 \\ (2a+1)x+3y+(a+2)z=3 \end{cases}$

4. $\begin{cases} x+2y+az=1 \\ 3x+4y+2z=a \\ 2x+3y-z=1 \end{cases}$

EXERCICE 3. ♣ – ●○○ *Inversion de matrices*
Déterminer si les matrices suivantes sont inversibles. Le cas échéant, calculer leur inverse.

1. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$;
2. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$;
3. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$;
4. $\begin{pmatrix} i & -1 & 2i \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

EXERCICE 4. ♣ – ●◐○ *Inversion de matrices à paramètres*
Pour chacune de ces matrices, discuter suivant les valeurs du réel m si elle est inversible, et donner le cas échéant son inverse.

1. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & m \\ 1 & 0 & m \\ m-1 & m-2 & 1-m \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix}$

EXERCICE 5. ●○○ *Conditions sur le graphe d'une fonction*
Soit $a, b, c \in \mathbb{R}$. On considère $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto ae^x + bx + c$.
Pour quelles valeurs de a, b et c a-t-on que le graphe de f contient le point $(0,1)$, que sa tangente en ce point contient également le point $(2,3)$ et que le graphe admette une tangente horizontale au point d'abscisse $\ln 3$?

EXERCICE 6. ♣ – ●○○ *Décomposition en éléments simples*
Déterminer les triplets $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ (s'ils existent) tels que l'on ait les identités suivantes.

1. $\forall x \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{U}_3, \dfrac{1}{x^3-1} = \dfrac{a}{x-1} + \dfrac{bx+c}{x^2+x+1}$;
2. $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0,2,3\}, \dfrac{1}{x^3-5x^2+6x} = \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{x-2} + \dfrac{c}{x-3}$;
3. $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}, \dfrac{x^2+x+1}{x-2} = ax + b + \dfrac{c}{x-2}$;
4. $\forall x \in \mathbb{C} \setminus \{0,1\}, \dfrac{1}{x^3-2x^2+x} = \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{x-1} + \dfrac{c}{(x-1)^2}$.

EXERCICE 7. ♢ – ●○○ *Systèmes non linéaires*
Résoudre les systèmes suivants (x, y et z sont réels).

1. $\begin{cases} xy = 1 \\ \frac{x}{y} = 2 \end{cases}$
2. $\begin{cases} xyz = 1 \\ xy^2z^4 = 2 \\ xy^3z^9 = 3. \end{cases}$

2 Calcul matriciel

EXERCICE 8. ○○○ *Produit de matrices*
Effectuer tous les produits possibles de deux matrices (non nécessairement distinctes) choisies parmi les quatre suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 \\ 8 & 5 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} ; B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 3 & 3 \\ 9 & 5 \end{pmatrix} ; C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 8 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ; D = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}.$$

EXERCICE 9. ○○○ *Calcul du noyau et de l'image*
Donner une base du noyau et de l'image de $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

EXERCICE 10. ○○○ *Représentation de projecteurs et symétries*

1. Dans $\mathbb{R}^3$, écrire les matrices dans la base canonique de
   (a) la projection sur le plan d'équation $x - 2y + 5z = 0$, parallèlement à la droite engendrée par le vecteur $(1, 1, -1)$;

(b) la symétrie par rapport à la droite engendrée par le vecteur $(1,2,-1)$, parallèlement au plan d'équation $x+3y-5z=0$.

2. Soit $P=\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Montrer que P est un projecteur, dont on déterminera le noyau et l'image. Déterminer une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de l'endomorphisme canoniquement associé à P est diagonale.

3. Soit $S=\begin{pmatrix} 3 & -16 & -12 \\ 2 & -9 & -6 \\ -2 & 8 & 5 \end{pmatrix}$. Montrer que S est une symétrie, dont on précisera les sous-espaces caractéristiques. Déterminer une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de l'endomorphisme canoniquement associé à S est diagonale.

EXERCICE 11. ◐○○ *Matrice J_n*

On note J_n la matrice carrée de taille n dont tous les coefficients valent 1.

1. Déterminer J_n^k, pour tout $k \in \mathbb{N}$.

2. J_n est-elle inversible ?

EXERCICE 12. ♣/♢ – ●○○ *Puissances de matrices*

Soient $a, b, \theta \in \mathbb{R}$. Calculer, pour tout n dans $\mathbb{N}$, la puissance n-ième des matrices suivantes.

1. $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

2. $B=\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$

3. $R_\theta=\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

4. $C=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

EXERCICE 13. ●○○ *Un calcul d'inverse*

Soit $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $-A^3+A^2+5A-I_3$.

2. En déduire que A est inversible et donner son inverse.

EXERCICE 14. ●○○ *Produit de matrices symétriques*

Montrer que deux matrices symétriques commutent ssi leur produit est une matrice symétrique.

EXERCICE 15. ●◐○ *Un calcul de commutant*

Soit $A=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer les matrices de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ qui commutent avec A.

EXERCICE 16. ♣ – ●◐○ *Triangulaire supérieure commutant avec sa transposée*
Que dire d'une matrice triangulaire supérieure de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ qui commute avec sa transposée ?

EXERCICE 17. ♣ – ●●○ *Matrice de racines de l'unité*
Soit $n \geq 2$. On note $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$ et $A = \left(\omega^{(p-1)(q-1)}\right)_{1\leq p,q\leq n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. On note $\overline{A}$ la matrice dont les coefficients sont les conjugués de ceux de A.

1. Calculer $A\overline{A}$.
2. En déduire que A est inversible et donner son inverse.

3 Exercices plus théoriques

EXERCICE 18. ◐○○ *Mini-maxi et Maxi-mini*
Soit $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ une matrice à coefficients réels. Montrer que

$$\min_{1\leq j\leq n} \max_{1\leq i\leq n} a_{i,j} \geq \max_{1\leq i\leq n} \min_{1\leq j\leq n} a_{i,j}.$$

EXERCICE 19. ●○○ *Une construction de* $\mathbb{C}$
On définit $C = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\} \subset \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

1. Montrer que C est un sous-anneau commutatif de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Montrer que C est un corps.
3. Montrer que C est isomorphe au corps des nombres complexes.

EXERCICE 20. ●○○ *Commutant de matrices diagonales*

1. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ des éléments de $\mathbb{K}$ deux à deux distincts et $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix}$.

   Déterminer les matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ commutant avec D.
2. En déduire le centre de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$: c'est-à-dire l'ensemble des matrices A de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telles que

$$\forall B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}),\ AB = BA.$$

EXERCICE 21. ●○○ *Matrices nilpotentes*
Une matrice $N \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est nilpotente s'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $N^k = 0$.

1. A quelle condition une matrice triangulaire supérieure est-elle nilpotente ?
2. On suppose $N \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ nilpotente. Montrer que $I_n - N$ est inversible et donner son inverse.

EXERCICE 22. ♣ – ●●○ *Alternative pour les systèmes linéaires*
Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$ et $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Montrer qu'exactement l'un des deux cas suivants advient :

1. $\exists X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}) : AX = B$;
2. $\exists Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) : Y^T A = 0$ et $Y^T B \neq 0$.

EXERCICE 23. ♣/♢ – ●●○ *Matrices équivalentes*
Soient n et p deux entiers naturels non nuls, A et B deux matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On dit que A et B sont équivalentes (en lignes-colonnes) si on peut passer de A à B par des opérations élémentaires sur les lignes **et** sur les colonnes.

1. Démontrer que A et B sont équivalentes ssi il existe P dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et Q dans $\mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$ telles que $A = PBQ$.
2. Démontrer que A est équivalente à une matrice de la forme $J_{n,p,r} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ où
$$J_{n,p,r} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & (0) & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & (0) & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix},$$
avec r nombres 1 sur la diagonale.
3. Démontrer que si $n = p$ et A n'est pas inversible, alors A est équivalente à une matrice triangulaire supérieure stricte.

EXERCICE 24. ♣/♢ – ●●◐ *Matrices à diagonale dominante*
Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que
$$\forall i \in [\![1,n]\!], |a_{i,i}| > \sum_{\substack{j \in [\![1,n]\!] \\ j \neq i}} |a_{i,j}|.$$
Montrer que A est inversible.

Indications

Exercice 7. On distinguera soigneusement selon les signes de x, y et z.

Exercice 12. En pratique, deviner la formule puis la montrer par récurrence. Pour 2., on peut être plus malin.

Exercice 23. Une opération élémentaire sur les lignes/colonnes correspond à multiplier à gauche/à droite par une matrice inversible. Par ailleurs, l'algorithme du pivot de Gauss montre que toute matrice inversible est produit de matrices d'opérations élémentaires.

Exercice 24. Considérer un $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ tel que $AX = 0$. Si par l'absurde X était non nul, on pourrait considérer un indice i tel que $|x_i|$ est maximal.