19 - Algèbre linéaire, théorie générale

Jeremy Daniel

On désigne par $\mathbb{K}$ un corps quelconque.
Quand ce n'est pas explicitement précisé, E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

1 Espaces vectoriels

1.1 Espace vectoriel

Exemples 1.1
- $E = \mathbb{K}^n$, ensemble des n-uplets dans $\mathbb{K}$;
- $E = \mathbb{K}[X]$, ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$;
- $E = \mathbb{K}(X)$, ensemble des fractions rationnelles à coefficients dans $\mathbb{K}$;
- L'ensemble E des solutions d'un système linéaire homogène à coefficients dans $\mathbb{K}$;
- L'ensemble E des solutions d'une équation différentielle homogène $y'' = ay' + by$, où a et b sont des constantes fixées dans $\mathbb{K}$ et y est une fonction inconnue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{K}$;
- L'ensemble E des suites (u_n) récurrentes linéaires d'ordre 2 vérifiant

  $$\forall n \in \mathbb{N} : u_{n+2} = au_n + bu_{n+1},$$

  où a et b sont des constantes fixées dans $\mathbb{K}$.

Remarque 1.2
Dans tous ces exemples :
- E est stable par somme ; c'est-à-dire que la somme de deux éléments de E est encore dans E.
- E est stable par multiplication par une constante dans $\mathbb{K}$: si on fait le produit d'un élément de E et d'une constante dans $\mathbb{K}$, on est encore dans E.

Définition 1.3 (Espace vectoriel)
Un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ (ou $\mathbb{K}$-espace vectoriel) est un ensemble E, muni d'une loi de composition interne notée $+$

$$\begin{cases} E \times E \to E, \\ (x, y) \mapsto x + y \end{cases}$$

et d'une application

$$\begin{cases} \mathbb{K} \times E \to E, \\ (\alpha, x) \mapsto \alpha \cdot x \end{cases}$$

appelée multiplication externe, tel que :

- $(E, +)$ est un groupe commutatif ;
- $\forall x, y \in E, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$:
  - $1_{\mathbb{K}} \cdot x = x$
  - $\alpha \cdot (\beta \cdot x) = (\alpha\beta) \cdot x$
  - $\alpha \cdot (x + y) = (\alpha \cdot x) + (\alpha \cdot y)$
  - $(\alpha + \beta) \cdot x = (\alpha \cdot x) + (\alpha \cdot y)$.

Définition 1.4 (Vecteurs, scalaires)
Les éléments de E sont les vecteurs ; les éléments de $\mathbb{K}$ sont les scalaires.

Remarque 1.5
Le plus souvent, on nomme les vecteurs avec des lettres latines et les scalaires avec des lettres grecques.

Attention !
Ne pas confondre les structures sur $\mathbb{K}$ et sur E :

- Comme $\mathbb{K}$ et E sont des groupes commutatifs, il y a une loi $+$ dans $\mathbb{K}$ (l'addition usuelle des réels ou des complexes si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et une loi $+$ dans E (l'addition des vecteurs, qui dépendra de l'espace vectoriel considéré). Par abus de notation, ces deux lois $+$ sont notées de la même façon.
- De même, il y a un élément neutre dans $\mathbb{K}$ (le zéro usuel) et un élément neutre dans E (un vecteur zéro) : on les note $0_{\mathbb{K}}$ et 0_E, ou plus simplement 0 par abus de notation.
- Sur $\mathbb{K}$, on a une loi de composition interne appelée produit (le produit usuel sur les réels ou les complexes si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Mais en général, il n'y a pas produit interne dans E : on ne multiplie pas ensemble deux vecteurs.
- Assez vite, on omettra la notation $\cdot$ pour la multiplication externe et on accolera simplement le scalaire et le vecteur que l'on multiplie.

Exemples 1.6

- Soit n un entier naturel. On définit $E = \mathbb{K}^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{K}\}$. La somme est la somme usuelle entre n-uplets d'éléments de $\mathbb{K}$:

  $$(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n).$$

  La multiplication externe est donnée par $\alpha \cdot (x_1, \ldots, x_n) = (\alpha x_1, \ldots, \alpha x_n)$, où α est dans $\mathbb{K}$.
  En particulier, pour $n = 1$, $\mathbb{K}^1 = \mathbb{K}$ peut-être vu comme un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
  Pour $n = 0$, $\mathbb{K}^0$ est un ensemble à un élément. C'est un (le) $\mathbb{K}$-espace vectoriel nul.
- $E = \mathbb{K}[X]$. La somme est la somme de polynômes ; le produit externe est le produit par une constante. Le produit entre deux polynômes ne fait pas partie de la structure d'espace vectoriel.
- Soit X un ensemble quelconque, soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. On considère $F =$

$\mathcal{F}(X, E) = E^X$ l'ensemble des fonctions de X dans E. C'est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Si $f, g \in F$ et si $\alpha \in \mathbb{K}$, la somme et la multiplication externe sont définies par :
  - $(f + g) : x \mapsto f(x) + g(x)$;
  - $(\alpha \cdot f) : x \mapsto \alpha \cdot (f(x))$.

  Le cas le plus important est celui où $E = \mathbb{K}$.
- N'importe quel $\mathbb{C}$-espace vectoriel peut être vu comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel en restreignant la multiplication externe aux seuls réels.

Proposition 1.7
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soient $\alpha \in \mathbb{K}$, soit $x \in E$. Alors,

$$\alpha \cdot x = 0_E \iff \alpha = 0_{\mathbb{K}} \text{ ou } x = 0_E.$$

Proposition 1.8
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soient $\alpha \in \mathbb{K}$ et $x \in E$.

$$\alpha \cdot (-x) = (-\alpha) \cdot x = -(\alpha \cdot x).$$

1.2 Sous-espace vectoriel

Définition 1.9 (Sous-espace vectoriel)
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Une partie F de E est un sous-espace vectoriel si
- F est un sous-groupe de $(E, +)$;
- $\forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall x \in F, \alpha \cdot x \in F$.

Définition 1.10 (Sous-espaces vectoriels triviaux)
L'espace E lui-même et le singleton $\{0\}$ sont des sous-espaces vectoriels de E, dits triviaux.

Remarque 1.11
Pour montrer que F est un sous-espace vectoriel de E, on montre que :
- $0 \in F$;
- $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall x, y \in F, \alpha x + \beta y \in F$.

Proposition 1.12 (Stabilité par combinaisons linéaires)
Un sous-espace vectoriel F de E est stable par combinaisons linéaires :

$$\forall \alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{K}, \forall x_1, \ldots, \forall x_k \in F, \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \cdot x_i \in F.$$

Proposition 1.13 (Un sous-espace vectoriel est un espace vectoriel)
Soit F un ssev de E. Muni des lois $+$ et $\cdot$ restreintes, F est un espace vectoriel.

Remarque 1.14
Pour montrer qu'un ensemble a une structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel, on montrera le plus souvent que c'est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de référence.

Exemples 1.15
- $\mathbb{K}_n[X] = \{P \in \mathbb{K}[X] \mid \deg P \leq n\} \subset \mathbb{K}[X]$.
- Soit $Q \in \mathbb{K}[X]$. Alors $Q\mathbb{K}[X] = \{QP, P \in \mathbb{K}[X]\} \subset \mathbb{K}[X]$.
- $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}) \subset \cdots \subset \mathcal{C}^k(\mathbb{R},\mathbb{R}) \subset \cdots \subset \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R}) \subset \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ est une chaîne d'inclusion de sous-espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$.
- Soient $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$. L'ensemble des $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tels que

  $$\begin{cases} ax + by + cz = 0 \\ dx + ey + fz = 0 \end{cases}$$

  est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
  Géométriquement, cet ensemble est une droite vectorielle si les deux équations ne sont pas proportionnelles ; un plan vectoriel si les deux équations sont proportionnelles mais que l'une au moins est non nulle ; $\mathbb{R}^3$ si toutes les constantes sont nulles.

Proposition 1.16 (Intersection de sous-espaces vectoriels)
Soit $(F_i)_{i\in I}$ une famille de sous-espaces vectoriels de E. Alors $\bigcap_{i\in I} F_i$ est un sous-espace vectoriel de E.

Définition 1.17 (Sous-espace vectoriel engendré par une partie)
Soit A une partie de E. Il existe un plus petit (pour l'inclusion) sous-espace vectoriel de E contenant A. C'est le sous-espace vectoriel engendré par A.

Notation 1.18
On note $\mathrm{Vect}(A)$ le sous-espace vectoriel engendré par A.

Définition 1.19 (Droite vectorielle)
On appelle droite vectorielle de E un ssev engendré par un vecteur non nul.

Définition 1.20 (Combinaison linéaire d'une famille finie de vecteurs)
Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille finie de vecteurs de E. Une combinaison linéaire d'éléments de cette famille est un vecteur de la forme $\sum_{i\in I} \lambda_i u_i$, où pour tout $i \in I$, $\lambda_i \in \mathbb{K}$.

Définition 1.21 (Famille à support fini de scalaires)
Une famille $(\lambda_i)_{i\in I}$ de scalaires est dite à support fini (ou presque nulle) si l'ensemble $J = \{i \in I \mid \lambda_i \neq 0\}$ est fini.

Définition 1.22 (Combinaison linéaire d'une famille quelconque de vecteurs)
Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs de E. Une combinaison linéaire d'éléments de cette famille est une vecteur de la somme $\sum_{i\in I} \lambda_i u_i$, où $(\lambda_i)_{i\in I}$ est une famille à support fini de scalaires.

Remarques 1.23
- La somme est définie en ne considérant que les indices pour lesquels $\lambda_i \neq 0$. Les règles de calculs usuelles restent valables.
- Autrement dit, une combinaison linéaire d'éléments de $(u_i)_{i\in I}$ est une combinaison linéaire d'éléments de $(u_j)_{j\in J}$, où J est une partie finie (quelconque) de I.

Remarque 1.24
On peut associer à toute partie A d'un ensemble E la famille $(a)_{a\in A}$, famille d'éléments de E. Ainsi, une notion sur les familles d'éléments de E donne une notion sur les parties de E. En particulier, si A est une partie d'un espace vectoriel E, on pourra parler de combinaisons linéaires d'éléments de A.

Théorème 1.25 (Ensemble des combinaisons linéaires et sous-espace vectoriel engendré)
Soit A une partie de E. Le sous-espace vectoriel $\mathrm{Vect}(A)$ *est l'ensemble des combinaisons linéaires d'éléments de A.*

Exercice 1.26
Décrire le sous-espace vectoriel engendré par deux vecteurs u et v dans $\mathbb{R}^3$.

Exemples 1.27
- Dans $\mathbb{R}^2$, $\mathrm{Vect}\big\{(1,0)\big\} = \big\{(x,0), x\in\mathbb{R}\big\}$. C'est la droite des abscisses.
- Soit $\alpha\in\mathbb{R}$. Dans $\mathbb{R}^3$, $\mathrm{Vect}\big\{(1,\alpha,0),(2,\alpha,0)\big\} = \big\{(\lambda+2\mu,(\lambda+\mu)\alpha,0,(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2\big\}$. C'est une droite vectorielle si $\alpha=0$, un plan vectoriel si $\alpha\neq 0$.
- Dans $\mathbb{R}[X]$, $\mathrm{Vect}\big\{1,X,X^2,\dots,X^n\big\} = \mathbb{R}_n[X]$.

1.3 Application linéaire

Définition 1.28 (Application linéaire)
Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$. Une application $f : E\to F$ est $\mathbb{K}$-linéaire (ou simplement linéaire) si

$$\forall\lambda,\mu\in\mathbb{K},\forall x,y\in E : f(\lambda x+\mu y) = \lambda f(x)+\mu f(y).$$

Proposition 1.29 (Application linéaire et combinaisons linéaires)
Soit $f : E\to F$ une application linéaire. Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs de E. Pour toute famille $(\lambda_i)_{i\in I}$ à support fini de scalaires, on a :

$$f\Big(\sum_{i\in I}\lambda_i u_i\Big) = \sum_{i\in I}\lambda_i f(u_i).$$

Notation 1.30
On note $\mathcal{L}(E,F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F.

Exemples 1.31
- $\psi : \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to, \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R}), f \mapsto f'$ est $\mathbb{R}$-linéaire.
- $\psi : \mathbb{K}[X] \to \mathbb{K}[X], P \mapsto P'$ est $\mathbb{K}$-linéaire.
- Les applications $\mathbb{K}$-linéaires de $\mathbb{K}$ dans $\mathbb{K}$ sont les applications de la forme $f_a : \mathbb{K} \to \mathbb{K}, u \mapsto au$, où a est un élément de $\mathbb{K}$
- $\psi : \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{C}) \to \mathbb{C}, f \mapsto \displaystyle\int_0^1 f(t)dt$ est $\mathbb{C}$-linéaire.

Exercice 1.32
Montrer que les applications $\mathbb{K}$-linéaires de $\mathbb{K}^2$ dans $\mathbb{K}^2$ sont les applications de la forme

$$\begin{cases} \mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}^2 \\ (x,y) \mapsto (ax+by, cx+dy) \end{cases}$$

où a,b,c,d sont dans $\mathbb{K}$.

Proposition 1.33
Si $f : E \to F$ est $\mathbb{K}$-linéaire, alors $f(0_E) = 0_F$.

Proposition 1.34 (Image directe et réciproque de ssev)
Soit $f : E \to F$ une application linéaire.
- *Si $E_1 \subset E$ est un ssev de E alors $f(E_1)$ est un ssev de F.*
- *Si $F_1 \subset F$ est un ssev de F alors $f^{-1}(F_1)$ est un ssev de E.*

Définition 1.35 (Endomorphisme, isomorphisme, automorphisme)
Soit $f : E \to F$ une application linéaire.
- Si $E = F$, on dit que f est un endomorphisme.
- Si f est bijective, on dit que f est un isomorphisme.
- Si $E = F$ et si f est bijective, on dit que f est un automorphisme.

Notation 1.36
On abrège $\mathcal{L}(E,E)$ en $\mathcal{L}(E)$. On note $\mathrm{GL}(E)$ l'ensemble des automorphismes de E et on note $\mathrm{Id}_E \in \mathrm{GL}(E)$ l'application identité de E.

Proposition 1.37 (L'ensemble des applications linéaires est un espace vectoriel)
Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$. Alors, $\mathcal{L}(E,F)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(E,F)$.

Proposition 1.38 (Linéarité des opérateurs de composition)
Soient E, F et G trois espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$. Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ des

applications linéaires. Alors $g \circ f$ est linéaire.
De plus, les applications

$$\psi_f : \begin{cases} \mathcal{L}(F,G) & \to \mathcal{L}(E,G) \\ v & \mapsto v \circ f \end{cases} \quad et \quad \phi_g : \begin{cases} \mathcal{L}(E,F) & \to \mathcal{L}(E,G) \\ u & \mapsto g \circ u \end{cases}$$

sont linéaires.

Corollaire 1.39 ($\mathcal{L}(E)$ est un anneau)
$(\mathcal{L}(E), +, \circ)$ *est un anneau.*

Exercice 1.40
Dans $E = \mathbb{R}[X]$, considérons les applications linéaires $d : E \to E, P \mapsto P'$ et $m : E \to E, P \mapsto X \times P$.
1. Montrer que d et m sont linéaires.
2. Calculer dm et md.
3. On note $\pi_n : E \to E$ l'application qui à $P \in E$ associe le reste de P dans la division euclidienne par X^n. Montrer que π_n est linéaire et calculer $d^n \pi_n$.

Proposition 1.41 (Bijection réciproque d'un isomorphisme)
Si $f : E \to F$ est un isomorphisme, alors f^{-1} est un isomorphisme.

Corollaire 1.42 ($\mathrm{GL}(E)$ est un groupe)
$(\mathrm{GL}(E), \circ)$ *est un groupe.*

Définition 1.43 (Noyau et image)
Soit $f : E \to F$ une application linéaire.
- Le noyau de f, noté $\mathrm{Ker}(f)$ est $\mathrm{Ker}(f) = f^{-1}(\{0_F\}) = \{u \in E \mid f(u) = 0_F\}$.
- L'image de f, notée $\mathrm{Im}(f)$ est $\mathrm{Im}(f) = f(E) = \{v \in F \mid \exists u \in E : f(u) = v\}$.

Proposition 1.44 (Noyau et injectivité)
Soit $f : E \to F$ une application linéaire.
Le noyau $\mathrm{Ker}(f)$ est un ssev de E ; il est réduit à $\{0_E\}$ ssi f est injective.

Proposition 1.45 (Image et surjectivité)
Soit $f : E \to F$ une application linéaire.
L'image $\mathrm{Im}(f)$ est un ssev de F ; elle est égale à à F ssi f est surjective.

Exemples 1.46
- Soit $d : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X], P \mapsto P'$. Alors d n'est pas injective : on a $d(1) = 0$ donc $1 \in \mathrm{Ker}(d)$.
- Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (ax + by, cx + dy)$. On résout $f(x, y) = 0$ et on trouve qu'on a une solution non nulle si, et seulement si $ad - bc = 0$. Donc f est injective si,

et seulement si $ad - bc \neq 0$. Dans ce cas, f est un automorphisme (on a un système de Cramer).
- Soit $\psi : \mathbb{K}[X] \to \mathbb{K}^{\mathbb{K}}$, qui à $P \in \mathbb{R}[X]$ associe l'application polynomiale $x \mapsto P(x)$. On a vu dans le cours sur les polynômes que ψ est injective ssi $\mathbb{K}$ est infini.

2 Décomposition en sous-espaces

2.1 Supplémentaire et produit

Définition 2.1 (Somme de deux ssev)
Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E.
On note $F + G$ le sous-espace vectoriel engendré par $F \cup G$. C'est la somme de F et G.

Proposition 2.2
La somme $F + G$ est l'ensemble des vecteurs de la forme $u + v$, avec $u \in F$ et $v \in G$.

Proposition 2.3 (Équivalences pour la somme directe)
Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Les deux proposition suivantes sont équivalentes :
1. $F \cap G = \{0\}$;
2. $\forall z \in F + G, \exists!\, (x, y) \in F \times G : z = x + y$.

Définition 2.4 (Somme directe de deux ssev)
Si les conditions ci-dessus sont satisfaites, on dit que F et G sont en somme directe.
On écrit alors $F \oplus G$ au lieu de $F + G$.

Exemple 2.5
Soient D_1 et D_2 deux droites vectorielles de E.
Si D_1 et D_2 sont distinctes, alors elles sont en somme directe.

Définition 2.6 (Sous-espaces vectoriels supplémentaires)
Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E.
On dit que F et G sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de E si $E = F \oplus G$.

Exemples 2.7
- Deux droites vectorielles distinctes sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^2$.
- Un plan vectoriel et une droite vectorielle non contenue dans le plan sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.
- Considérons $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Notons F le sous-espace vectoriel constitué par les fonctions paires, G celui constitué par les fonctions impaires.
  Alors F et G sont supplémentaires dans E.

- Considérons $E = \mathbb{K}[X]$ et $P \in \mathbb{K}[X]$ de degré $n \geq 1$. Alors $F = P\mathbb{K}[X]$ et $G = \mathbb{K}_{n-1}[X]$ sont supplémentaires.
- Considérons $E = \mathbb{K}(X)$ et notons $F = \mathbb{K}[X]$ et G le sous-espace vectoriel des fractions rationnelles de degré strictement négatif. Alors F et G sont supplémentaires dans E.

Définition 2.8 (Espace vectoriel produit)
Soient E_1 et E_2 deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$. Le produit cartésien $E_1 \times E_2$ a une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ donnée par :

$$\begin{aligned}(x_1, x_2) + (y_1, y_2) =&(x_1 + x_2, y_1 + y_2)\\ \lambda \cdot (x_1, x_2) =&(\lambda \cdot x_1, \lambda \cdot x_2),\end{aligned}$$

où les x_i et y_i sont dans E_i et λ est dans $\mathbb{K}$.

Remarque 2.9
On peut généraliser à un produit fini (ou bien infini) d'espaces vectoriels.

Proposition 2.10 (Produit, somme et supplémentaire)
Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Alors $\phi : F \times G \to E, (u, v) \mapsto u + v$ est un isomorphisme ssi F et G sont supplémentaires dans E.

Théorème 2.11 (Applications linéaires et supplémentaires)
Soient E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E. Soit F un espace vectoriel. Alors,

$$\psi \begin{cases} \mathcal{L}(E, F) & \to \mathcal{L}(E_1, F) \times \mathcal{L}(E_2, F) \\ f & \mapsto (f_{|E_1}, f_{|E_2}) \end{cases}$$

est un isomorphisme.

Remarque 2.12
On peut généraliser à un nombre fini de sous-espaces. Soient $F_1, \dots, F_p$ des sous-espaces vectoriels de E.
- $F_1 + \cdots + F_p$ est le sous-espace vectoriel engendré par $F_1 \cup \cdots \cup F_p$.
- C'est l'ensemble des éléments de la forme $u_1 + \cdots + u_p$, où les u_i sont dans F_i.
- Si $\forall u \in F_1 + \cdots + F_p, \exists!(u_1, \dots, u_p) \in F_1 \times \cdots \times F_p$ tel que $u = u_1 + \cdots + u_p$, on dit que la somme est directe et on écrit $F_1 \oplus \cdots \oplus F_p$ au lieu de $F_1 + \cdots + F_p$.
- Si $E = \bigoplus_{i=1}^{p} E_i$, alors $\begin{cases} \mathcal{L}(E, F) & \to \prod_{i=1}^{p} \mathcal{L}(E_i, F) \\ f & \mapsto (f_{|E_i})_{i=1,\dots,p} \end{cases}$ est un isomorphisme.

Attention !
Trois sous-espaces vectoriels E_1, E_2 et E_3 peuvent être deux à deux en somme directe, sans qu'ils le soient pris ensemble. Considérer trois droites vectorielles distinctes de $\mathbb{R}^2$.

Proposition 2.13
Soient $F_1, \dots, F_p$ des sous-espaces vectoriels de E. On a l'équivalence suivante :

1. *$F_1, \dots, F_p$ sont en somme directe dans E ;*
2. *$\forall (u_1, \dots, u_p) \in F_1 \times \cdots \times F_p : u_1 + \cdots + u_p = 0 \implies u_1 = \cdots = u_p = 0$;*
3. *$\forall i \in \{1, \dots, p\}$, F_i et $\displaystyle\sum_{k \neq i} F_k$ sont en somme directe.*

2.2 Projections et symétries

Définition 2.14 (Projection)
Soient F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E. L'unique application $\pi \in \mathcal{L}(E)$ telle que

$$\forall x \in F, \pi(x) = x$$
$$\forall y \in G, \pi(y) = 0$$

est la projection (ou le projecteur) sur F parallèlement à G.

Exemples 2.15

- $E = \mathbb{K}[X]$, $P \in \mathbb{K}[X]$ de degré $n \geq 1$. Si $F = P\mathbb{K}[X]$ et $G = \mathbb{K}_{n-1}[X]$, on a vu que $E = F \oplus G$. La projection π sur G parallèlement à F associe à un polynôme A de $\mathbb{K}[X]$ son reste dans la division euclidienne par P.
- L'application $\pi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (x, 0)$ est la projection sur l'axe des abscisses, parallèlement à l'axe des ordonnées.
- Soient $D_1 = \big\{(x, 0), x \in \mathbb{R}\big\}$ et $D_2 = \big\{(y, y), y \in \mathbb{R}\big\}$, supplémentaires dans $\mathbb{R}^2$. La projection sur D_1 parallèlement à D_2 est donnée par $(x, y) \mapsto (x - y, 0)$.

Théorème 2.16 (Caractérisation des projections)
On suppose que $E = F \oplus G$. Soit π la projection sur F parallèlement à G. Alors,

1. *$\pi^2 = \pi$;*
2. *$F = \operatorname{Im} \pi$;*
3. *$G = \operatorname{Ker} \pi$.*

Réciproquement, soit $p \in \mathcal{L}(E)$ tel que $p^2 = p$. Alors,

1. *$E = \operatorname{Im} p \oplus \operatorname{Ker} p$;*
2. *p est la projection sur $\operatorname{Im} p$, parallèlement à $\operatorname{Ker} p$.*

Définition 2.17 (Symétrie)
On suppose $\operatorname{car} \mathbb{K} \neq 2$. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E. L'unique application $s \in \mathcal{L}(E)$ telle que

$$\forall x \in F, s(x) = x$$
$$\forall y \in G, s(y) = -y$$

est la symétrie par rapport à F parallèlement à G.

Exemple 2.18
On considère $\mathbb{C}$ comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. La conjugaison complexe est la symétrie par rapport à l'axe des réels, parallèlement à l'axe des imaginaires purs.

Exercice 2.19
Considérons une décomposition $E = F \oplus G$ et notons p la projection sur F parallèlement à G et s la symétrie par rapport à F parallèlement à G. Montrer que $s = 2p - \mathrm{Id}_E$.

Théorème 2.20 (Caractérisation des symétries)
On suppose $E = F \oplus G$. Soit s la symétrie par rapport à F parallèlement à G. Alors
1. $s^2 = \mathrm{Id}_E$;
2. $F = \mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_E)$;
3. $G = \mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}_E)$.

Réciproquement, soit $s \in \mathcal{L}(E)$ telle que $s^2 = \mathrm{Id}_E$. Alors
1. $E = \mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}_E)$
2. *s est la symétrie par rapport à* $\mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_E)$ *parallèlement à* $\mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}_E)$.

Exercice 2.21
Dans $\mathbb{K}[X]$, on considère F et G les sous-espaces vectoriels constitués par les polynômes pairs et impairs. Identifier la symétrie par rapport à F parallèlement à G.

2.3 Formes linéaires et hyperplans

Définition 2.22 (Forme linéaire)
Une forme linéaire sur E est une application linéaire de E dans $\mathbb{K}$.

Notation 2.23
On note $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ l'ensemble des formes linéaires sur E.

Exemples 2.24
- Sur $E = \mathbb{R}^3$, $l_1 : (x, y, z) \mapsto x$.
- Sur $E = \mathbb{K}[X]$, $l_2 : P \mapsto P'(0)$.
- Sur $E = \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $l_3 : f \mapsto \displaystyle\int_0^1 f(t)dt$.

Définition 2.25 (Hyperplan)
On appelle *hyperplan* le noyau d'une forme linéaire non nulle.

Exemples 2.26
Dans les exemples précédents :
- $\mathrm{Ker}(l_1) = \{(0, y, z) \mid y, z \in \mathbb{R}\}$.
- $\mathrm{Ker}(l_2)$ est l'ensemble des polynômes dont le coefficient devant X est nul.
- $\mathrm{Ker}(l_3)$ est l'ensemble des fonctions de moyenne nulle sur $[0, 1]$.

Théorème 2.27 (Supplémentaire d'un hyperplan)
Soit H un hyperplan de E. Si $x \notin H$, $E = H \oplus \text{Vect}\{x\}$.

Exemples 2.28
Dans les exemples précédents, on peut prendre :
- $u_1 = (1, 0, 0)$, on a $l_1(u_1) = 1 \neq 0$.
- $u_2 = X$, on a $l_2(u_2) = 1 \neq 0$.
- u_3 la fonction constante égale à 1. On a $l_3(u_3) = 1 \neq 0$.

Proposition 2.29 (Un hyperplan est maximal parmi les ssev stricts)
Soit H un hyperplan de E.
Si F est un sous-espace vectoriel de E contenant H, alors $F = H$ ou $F = E$.

3 Familles de vecteurs

3.1 Familles génératrices

Définition 3.1 (Famille génératrice)
Une famille $(e_i)_{i\in I}$ d'éléments de E est génératrice si elle engendre E.

Remarque 3.2
On parle aussi de partie génératrice.

Méthode 3.3
Pour montrer qu'une famille $(e_i)_{i\in I}$ est génératrice, on considère un vecteur quelconque x dans E et on cherche à l'écrire comme combinaison linéaire des e_i.

Proposition 3.4 (Transitivité)
Soit $(e_i)_{i\in I}$ une famille génératrice de E. Une famille $(f_j)_{j\in J}$ de vecteurs de E est génératrice de E ssi chaque e_i est une combinaison linéaire de la famille $(f_j)_{j\in J}$.

Exemples 3.5
- Dans $\mathbb{R}^n$, posons $e_1 = (1, 0, 0, \dots, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$,..., $e_n = (0, 0, \dots, 1)$. Alors, la famille $(e_i)_{i=1}^n$ est génératrice de $\mathbb{R}^n$. En effet, tout vecteur $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ de $\mathbb{R}^n$ s'écrit $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i e_i$.
- La famille $(X^k)_{k\in\mathbb{N}}$ est génératrice de $\mathbb{K}[X]$.C'est une famille infinie mais tout polynôme est combinaison linéaire d'un nombre fini de X^k.

3.2 Familles libres

DÉFINITION 3.6 (Famille finie libre)
Soit $(e_i)_{i\in I}$ une famille finie d'éléments de E. On dit que la famille est libre si

$$\forall (\lambda_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^I : \sum_{i\in I} \lambda_i e_i = 0 \implies \forall i \in I, \lambda_i = 0.$$

Dans le cas contraire, on dit que la famille est liée.

DÉFINITION 3.7 (Famille libre quelconque)
Soit $(e_i)_{i\in I}$ une famille quelconque d'éléments de E. On dit que la famille est libre si pour tout sous-ensemble $J \subset I$ fini, la famille $(e_i)_{i\in J}$ est libre. Sinon, on dit qu'elle est liée.

REMARQUE 3.8
On parle aussi (rarement) de partie libre.

MÉTHODE 3.9
Pour montrer qu'une famille finie $(e_i)_{i\in I}$ est libre, on suppose qu'on a une combinaison linéaire des e_i qui vaut 0 et on montre qu'alors tous les scalaires dans cette combinaison sont nuls.
Pour montrer qu'une famille quelconque $(e_i)_{i\in I}$ est libre, on considère une sous-famille finie quelconque de ces vecteurs et on montre qu'elle est libre.

EXEMPLES 3.10
- Dans $\mathbb{R}^n$, la famille $(e_i)_{i=1}^n$ définie précédemment est libre : soient en effet $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tels que $\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i = 0$. Alors $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = 0$ et donc tous les λ_i sont nuls.
- De même, la famille $(X^k)_{k\in\mathbb{N}}$ dans $\mathbb{K}[X]$ est libre.

EXERCICE 3.11
Dans $\mathbb{R}^3$, on pose $e_1 = (1, 1, 1)$, $e_2 = (-1, 1, -1)$ et $e_3 = (1, -1, -1)$. Montrer que la famille (e_1, e_2, e_3) est libre.

EXERCICE 3.12
On considère $E = \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Pour tout réel α, on note $f_\alpha \in E$ telle que $f_\alpha : x \mapsto \exp(\alpha x)$. Montrer que la famille $(f_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{R}}$ est libre.

PROPOSITION 3.13 (Liberté d'une famille de deux vecteurs)
Deux vecteurs x et y forment une famille libre ssi il n'existe pas $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $x = \lambda y$ ou $y = \lambda x$.

DÉFINITION 3.14 (Vecteurs colinéaires)
Deux vecteurs x et y sont dits colinéaires si l'un des deux est un multiple de l'autre.

Remarque 3.15
Ainsi, une famille de deux vecteurs est libre ssi les deux vecteurs ne sont pas colinéaires.

Proposition 3.16 (Liberté d'une famille de n vecteurs, par récurrence)
Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une famille d'éléments de E. On suppose que e_1 est non nul et que pour tout $i \in \{2, \dots, n\}$, $e_i \notin \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_{i-1})$. Alors la famille est libre.

Attention !
Il ne suffit pas de vérifier que e_n n'est pas combinaison linéaire de $e_1, \dots, e_{n-1}$.

Exercice 3.17
Une famille $(e_1, \dots, e_n)$ est libre si, et seulement si pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, e_i n'est pas combinaison linéaire de la famille $(e_k)_{k \neq i}$.

3.3 Bases d'un espace vectoriel

Définition 3.18 (Base)
Une famille $(e_i)_{i \in I}$ d'éléments de E est une base de E si c'est une famille libre et génératrice de E.

Exemples 3.19
- Dans $\mathbb{R}^n$, la famille $e_1, \dots, e_n$ est une base. On l'appelle la base canonique de $\mathbb{R}^n$.
- Dans $\mathbb{K}[X]$, la famille $(X^k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une base. On l'appelle la base canonique de $\mathbb{K}[X]$.
- Considérons $E = \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. Pour $k \in \mathbb{N}$, notons (u^k) la suite dont le terme général est $u^k_n = \delta_{k,n}$. Ce n'est pas une base de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$: en effet, le sous-espace vectoriel engendré par cette famille est l'ensemble $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$ des suites à support fini.

Définition 3.20 (Coordonnées d'un vecteur dans une base)
Soit $(e_i)_{i \in I}$ une base de E. Si x est un vecteur de E, on appelle coordonnées de x dans la base (e_i) l'unique famille $(x_i)_{i \in I}$ à support fini telle que $x = \displaystyle\sum_{i \in I} x_i e_i$.

Exemple 3.21
Les coordonnées d'un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ dans la base canonique sont ses coefficients.

Exercice 3.22
Dans $\mathbb{R}_n[X]$, on considère une famille $(P_k)_{k=0}^n$ de polynômes tels que, pour tout k, $\deg P_k = k$. Montrer que la famille $(P_k)_{k=0}^n$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

3.4 Familles de vecteurs et applications linéaires

Proposition 3.23 (Familles génératrices et applications linéaires)
Soit $f : E \to F$ une application linéaire.

- *Si* $(e_i)_{i\in I}$ *est une famille génératrice de* E*, alors* $\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}\big(f(e_i)\big)_{i\in I}$.
- *En particulier,* f *est surjective si, et seulement la famille* $\big(f(e_i)\big)_{i\in I}$ *engendre* F.

Proposition 3.24 (Familles libres et applications linéaires)
Soit $f : E \to F$ *une application linéaire.*

- *Soit* $(e_i)_{i\in I}$ *une famille libre de* E*. Si* f *est injective, alors la famille* $\big(f(e_i)\big)_{i\in I}$ *est libre.*
- *Soit* $(e_i)_{i\in I}$ *une base de* E*. Alors,* f *est injective si, et seulement si la famille* $\big(f(e_i)\big)_{i\in I}$ *est libre.*

Corollaire 3.25 (Bases et applications linéaires)
Soit $f : E \to F$ *une application linéaire, soit* $(e_i)_{i\in I}$ *une base de* E*. Alors* f *est un isomorphisme si, et seulement si, la famille* $\big(f(e_i)\big)_{i\in I}$ *est une base de* F.

Théorème 3.26 (Définition d'une application linéaire par les éléments d'une base)
Soit $(e_i)_{i\in I}$ *une base de* E*. Étant donnée une famille* $(f_i)_{i\in I}$ *d'éléments de* F*, il existe une unique application linéaire* $f : E \to F$ *telle que*

$$\forall i \in I : f(e_i) = f_i.$$