Semaine 16 – Algèbre linéaire – Matrice – Dimension finie (début)

1 Calcul matriciel

- Espace vectoriel des matrices de taille (n, p) à coefficients dans un corps $\mathbb{K}$
- Matrices élémentaires
- Produit matriciel, produit de matrices élémentaires
- Associativité et bilinéarité du produit
- Transposition, propriétés
- Anneau $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, groupe des inversibles $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$
- Matrices symétriques et anti-symétriques, décomposition d'une matrice en somme de matrices symétrique et anti-symétrique si $\mathrm{car}(\mathbb{K}) \neq 2$
- Représentation d'une application linéaire de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^n$ par une matrice $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$
- Isomorphisme $\mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n) \cong \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$; compatibilité avec l'évaluation en un vecteur et la composition d'applications linéaires
- *Pas de représentation matricielle dans d'autres bases.*

2 Systèmes linéaires

- Vocabulaire général
- Structure de l'espace des solutions
- Interprétation matricielle
- Opérations sur les lignes ; interprétation comme produit matriciel à gauche
- Algorithme du pivot de Gauss, système échelonné, variables libres

3 Anneau $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

- Une matrice carrée A est inversible ssi l'équation $AX = B$, d'inconnue X (avec X et B matrices colonne) a une unique solution, quelle que soit B. Systèmes de Cramer.
- Image et noyau d'une matrice ; critère d'inversibilité si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$
- Une matrice est inversible ssi elle est inversible à droite/à gauche
- Calcul pratique de l'inverse d'une matrice.
- Cas de la dimension 2, déterminant et formule pour l'inverse.
- Sous-anneaux des matrices triangulaires (supérieures) et diagonales.

- Condition d'inversibilité d'une matrice diagonale/triangulaire.
- Les coefficients diagonaux d'un produit de deux matrices diagonale/triangulaire sont les produits des coefficients diagonaux.
- Une matrice triangulaire supérieure stricte est nilpotente.

4 Dimension finie

- Espace vectoriel de dimension finie
- Complétion d'une famille libre en une base, en lui adjoignant des vecteurs d'une famille génératrice
- Théorème de la base extraite, théorème de la base incomplète
- Existence d'une base dans un espace vectoriel de dimension finie
- Une famille d'au moins $n+1$ vecteurs dans un espace engendré par n vecteurs est liée.
- Toutes les bases ont même cardinal : la dimension de l'espace vectoriel
- Un sous-espace d'un espace de dimension finie n est de dimension finie $p \leq n$. Cas d'égalité.
- Rang d'une famille de vecteurs
- Dimension d'un produit d'espaces vectoriels, d'une somme directe
- Formule de Grassmann
- **Traité lundi.** Théorème du rang et conséquences pour les applications linéaires entre espaces de dimension finie.
- **Traité au plus tard mercredi.** Formes linéaires, hyperplan, dualité, dimension.

5 Exemples de questions de cours

- Calcul pratique des solutions d'un système linéaire, de l'inverse d'une matrice. *On peut inclure un/des paramètre(s) mais on limitera la technicité excessive.*
- Cas des matrices 2×2
- Détermination du rang d'une famille de vecteurs (*pas encore d'interprétation matricielle*)
- Formule de Grassmann