# DM 11 – Nombres algébriques – Reprise

## 1 L'algèbre $\mathbb{Q}[\alpha]$

1. Pour le morphisme d'anneaux, ne pas oublier de dire que le polynôme 1 est envoyé sur le complexe 1.
2. L'image d'un morphisme d'anneaux est un sous-anneau (propriété du cours). De plus, montrer que $\mathbb{Q}[\alpha]$ est le $\mathbb{Q}$-ev engendré par les $\alpha^n$ se déduit immédiatement du fait que les monômes $X^n$ engendrent $\mathbb{Q}[X]$. Utiliser au maximum les propriétés des morphismes vous fait gagner du temps et montre un certain recul à la personne qui vous lit.
3. Trop d'arguments confus. Privilégier un argument circulaire (3 implications et non pas 4). La non-injectivité d'un morphisme de groupes (en particulier d'une application linéaire) est exploitée par l'existence d'un $P$ non nul dans $\mathrm{Ker}\,\phi_\alpha$ (plus agréable que de parler de $P \neq Q$ tels que $\phi(P) = \phi(Q)$).
4. Bien citer le caractère principal de l'anneau $\mathbb{Q}[X]$ pour la deuxième partie. C'est un fait général (facile à prouver) que le noyau d'un morphisme d'anneaux est un idéal
5. Pas besoin de raisonner par l'absurde quand on écrit une décomposition $P_\alpha = QR$. Il s'agit juste de montrer que $Q$ ou $R$ doit avoir même degré que $P_\alpha$ (donc est associé à $P_\alpha$).
6. RAS
7. Pas toujours très bien écrit.
   (a) Le point important est le fait que $\mathbb{Q}[\alpha]$ est laissé stable par $m_\beta$. C'est une conséquence du fait que $\mathbb{Q}[\alpha]$ est un sous-anneau de $\mathbb{C}$.
   (b) RAS
8. Dans beaucoup de copies, on me dit que si $P(\alpha)$ et $Q(\alpha)$ sont deux éléments de $\mathbb{Q}[\alpha] \setminus \mathbb{Q}$ inverses l'un de l'autre, alors l'égalité $P(\alpha)Q(\alpha) = 1$ entraîne la non-injectivité de $\phi_\alpha$. C'est vrai ; mais pourquoi ne pas **fixer** l'un des deux éléments. Prendre $P = X$ (c'est-à-dire simplement considérer $\alpha$ et son inverse) limite les notations et clarifie l'argument.

## 2 Le corps $\overline{\mathbb{Q}}$ des nombres algébriques

9. (a) RAS
   (b) Bien faire référence au fait admis de l'énoncé : un ssev d'un ev de dimension finie est de dimension finie.
10. Il reste à parler de la stabilité par l'inverse (et en théorie de l'opposé ; *il aurait été mieux de traiter $\alpha - \beta$ dans le sujet.*). Le plus rapide est de remarquer que $\mathbb{Q}[\alpha^{-1}] \subset \mathbb{Q}[\alpha]$ (en fait une égalité) car $\alpha^{-1} \in \mathbb{Q}[\alpha]$, ce qui implique la dimension finie de $\mathbb{Q}[\alpha]$

11. Il n'est pas difficile d'exhiber un polynôme annulateur de $\alpha$, connaissant un polynôme annulateur de $\alpha^n$ ; mais on peut aussi avoir recours à des arguments plus abstraits.

## 3 $\overline{\mathbb{Q}}$ est dénombrable

12. Déjà fait, mais on s'adapte à l'énoncé. Si dénombrable est défini comme image par $\mathbb{N}$ d'une surjection, un argument montrant qu'il existe une injection de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{N}$ ne suffit pas.

13. RAS

14. Très mal rédigé en moyenne. Il s'agissait essentiellement de remarquer qu'un élément de cette union peut être codé par un couple d'entiers (donc par un entier, du fait de la dénombrabilité de $\mathbb{N}^2$)

15. Pas mal d'arguments confus ou inutilement compliqués. Le plus simple est de dire que $\overline{Q}$ est une double union : $\overline{Q} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \bigcup_{P\in\mathbb{Q}_{(n)}[X]} Z(P)$, où $\mathbb{Q}_{(n)}[X]$ désigne l'ensemble des polynômes unitaires de degré $n$ à coefficients rationnels et $Z(P)$ est l'ensemble (fini) des zéros de $P$. On conclut avec la question précédente, après avoir remarqué que $\mathbb{Q}_{(n)}[X]$ est dénombrable car en bijection avec $\mathbb{Q}^n$.

## 4 Mesure d'irrationalité et constante de Liouville (*facultatif*)

J'ai lu cette partie en diagonale. Globalement, c'était bien traité.