

Algèbre linéaire - Dimension finie

1 Calculs pratiques

EXERCICE 1. ○○○ *Calculs dans \mathbb{R}^4* Soient F, G les sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^4 définis par :

$$F = \{(x, y, z, t) \mid x + y + z = 0 \text{ et } 2x + y + z - t = 0\} \text{ et } G = \text{Vect}\{(1, -2, 1, 1), (1, 2, -3, 1), (5, -3, -2, 5)\}.$$

1. Calculer la dimension de F .
2. Montrer que $G \subset F$, puis que $G = F$.
3. Déterminer un supplémentaire de F dans \mathbb{R}^4 .

EXERCICE 2. ○○○ *Un endomorphisme de \mathbb{R}^3* Soit $E = \mathbb{R}^3$. On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de E et u l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 défini par la donnée des images des vecteurs de la base :

$$u(e_1) = -2e_1 + 2e_3, u(e_2) = 3e_2, u(e_3) = -4e_1 + 4e_3.$$

1. Déterminer une base de $\text{Ker}(u)$. L'endomorphisme u est-il injectif ? Est-il surjectif ?
2. Déterminer une base de $\text{Im}(u)$. Quel est le rang de u ?
3. Montrer que $E = \text{Ker}(u) \oplus \text{Im}(u)$.

EXERCICE 3. ○○○ *Une application linéaire de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R}^4* On considère l'application linéaire f de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R}^4 définie par

$$f(x, y, z) = (x + z, y - x, z + y, x + y + 2z).$$

1. Déterminer une base de $\text{Im}(f)$.
2. Déterminer une base de $\text{Ker}(f)$.
3. L'application f est-elle injective ? Est-elle surjective ?

EXERCICE 4. ●○○ *Un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$* On définit sur $E = \mathbb{R}_3[X]$, l'application $u : P \mapsto P + (1 - X)P'$.

1. Montrer que u est un endomorphisme de E .
2. Déterminer une base de $\text{Ker}(u)$.
3. Déterminer une base de $\text{Im}(u)$.
4. Montrer que $\text{Ker}(u)$ et $\text{Im}(u)$ sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E .

2 Sous-espaces

EXERCICE 5. ♣/◇ – ●○○ Rang d'une famille augmentée

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E de dimension finie.

1. Montrer que $\dim(F + G) \leq \dim F + \dim G$ et préciser le cas d'égalité.
2. On considère (x_1, \dots, x_n) une famille de E . Montrer que, pour tout $p \in \llbracket 0, n \rrbracket$:

$$\operatorname{rg}(x_1, \dots, x_n) \leq \operatorname{rg}(x_1, \dots, x_p) + n - p.$$

EXERCICE 6. ●○○ Suites récurrentes

1. Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $a_1, \dots, a_p \in \mathbb{R}$. Soit E l'ensemble des suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ réelles telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+p} = a_1 u_{n+p-1} + \dots + a_p u_n.$$

Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ de dimension finie et préciser sa dimension.

2. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Donner une base de l'espace des suites vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = a u_{n+1} + b u_n.$$

EXERCICE 7. ♣ – ●●○ Supplémentaire commun à deux espaces

Soient E un espace vectoriel de dimension finie n , soient F, G deux sous-espaces vectoriels de E de même dimension p . Montrer que F et G ont un supplémentaire commun : il existe un sous-espace H de E tel que $F \oplus H = G \oplus H = E$.

EXERCICE 8. ♣/◇ – ●●○ Sous-espaces de grande dimension

Soient F_1, \dots, F_p des sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E de dimension n .

On suppose que $\sum_{i=1}^p \dim F_i > (p-1)n$. Montrer que $\bigcap_{i=1}^p F_i \neq \{0\}$.

EXERCICE 9. ♣ – ●●○ Matrices magiques

Une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite *magique* s'il existe un nombre réel m tel que la somme des coefficients de M présents sur chaque ligne et sur chaque colonne vaut m . Montrer que l'ensemble des matrices magiques est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et déterminer sa dimension.

EXERCICE 10. ●●● Équivalence sur les familles de sous-espaces

Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie. On dit que deux r -uplets (F_1, \dots, F_r) et (F'_1, \dots, F'_r) de sous-espaces vectoriels de E sont *équivalents* s'il existe un automorphisme $\phi \in \operatorname{GL}(E)$ tel que $\forall i \in \llbracket 1, r \rrbracket, \phi(F_i) = F'_i$.

1. Classifier les sous-espaces vectoriels de E à équivalence près.
2. Classifier les couples de sous-espaces vectoriels de E à équivalence près.

On suppose désormais pour simplifier que E est de dimension paire et on note $r = \frac{1}{2} \dim E$.

3. Montrer que les triplets de sous-espaces vectoriels (F_1, F_2, F_3) tels que

$$\forall i \in [1, 3], \dim F_i = r \text{ et } \forall i \neq j \in [1, 3], F_i \cap F_j = \{0_E\}$$

sont tous équivalents entre eux.

4. Montrer qu'il existe une infinité de quadruplets de sous-espaces vectoriels (F_1, F_2, F_3, F_4) tels que

$$\forall i \in [1, 4], \dim F_i = r \text{ et } \forall i \neq j \in [1, 4], F_i \cap F_j = \{0_E\}$$

deux à deux non équivalents.

3 Applications linéaires

EXERCICE 11. ●○○ $E = \text{Ker } u \oplus \text{Im } u$

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

Montrer l'équivalence entre les assertions suivantes :

- a) $\text{Ker } u = \text{Ker } u^2$; b) $\text{Im } u = \text{Im } u^2$; c) $E = \text{Ker } u \oplus \text{Im } u$.

EXERCICE 12. ◇ – ●○○ *Endomorphisme localement nilpotent*

Un endomorphisme f de $\mathcal{L}(E)$ est dit localement nilpotent si

$$\forall x \in E, \exists k \in \mathbb{N}, f^k(x) = 0.$$

1. Montrer que si E est de dimension finie, un endomorphisme localement nilpotent de E est nilpotent.
2. Montrer que le résultat est faux en général si on ne suppose plus E de dimension finie.

EXERCICE 13. ♣/◇ – ●○○ *Décomposition en somme d'endomorphismes de rang 1*

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Montrer qu'un endomorphisme u de E de rang r est somme de r endomorphismes de rang 1.

EXERCICE 14. ●○○ *Un endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$*

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, soient $u, v \in \mathcal{L}(E)$. On définit ϕ de $\mathcal{L}(E)$ dans $\mathcal{L}(E)$, par $\phi : f \mapsto u \circ f \circ v$. Montrer que $\phi \in \mathcal{L}(\mathcal{L}(E))$ et déterminer à quelle condition $\phi = 0$.

EXERCICE 15. ♣ – ●●○ *Noyaux et images itérés*

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et u un endomorphisme de E .

1. Montrer que la suite de sous-espaces vectoriels $(\text{Ker } u^k)_{k \in \mathbb{N}}$ (resp. $(\text{Im } u^k)_{k \in \mathbb{N}}$) est croissante (resp. décroissante) pour l'inclusion.
2. Montrer qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \geq p$, $\text{Ker } u^k = \text{Ker } u^p$ et $\text{Im } u^k = \text{Im } u^p$.
3. Montrer que, pour cet entier p , $E = \text{Ker } u^p \oplus \text{Im } u^p$.

EXERCICE 16. ●●○ *Inclusion de noyaux*

Soient E, F et G trois espaces vectoriels de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E, F)$, $v \in \mathcal{L}(E, G)$.

Le but de l'exercice est de démontrer que $\text{Ker } u \subset \text{Ker } v \iff (\exists w \in \mathcal{L}(F, G) : v = w \circ u)$.

1. On suppose qu'il existe $w \in \mathcal{L}(F, G)$ telle que $v = w \circ u$. Montrer que $\text{Ker } u \subset \text{Ker } v$.
2. En considérant un supplémentaire S de $\text{Ker } u$ dans E et un supplémentaire T de $\text{Im } u$ dans F , construire une application linéaire $w \in \mathcal{L}(F, G)$ telle que $v = w \circ u$.

EXERCICE 17. ♣ – ●●○ *Indice de nilpotence*

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n . Soit u un endomorphisme nilpotent de E : il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $u^p = 0$. On veut montrer que $u^n = 0$.

1. **Première méthode.** Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on définit $N_k = \text{Ker}(u^k)$.
 - (a) Montrer que la suite $(N_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est croissante pour l'inclusion.
 - (b) Montrer que si $N_{k_0} = N_{k_0+1}$, alors la suite (N_k) stationne en N_{k_0} .
 - (c) En déduire que $N_{k_0} = E$ et conclure.
2. **Deuxième méthode.** On note p le plus petit entier tel que $u^p = 0$.
 - (a) Montrer qu'il existe $x \notin \text{Ker } u^{p-1}$ et que, pour un tel x , la famille $(x, u(x), \dots, u^{p-1}(x))$ est libre.
 - (b) Conclure.

EXERCICE 18. ●●○ *Reste dans la division euclidienne*

Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ et soient A, B deux polynômes de degré $n + 1$. On définit l'application $\phi : E \rightarrow E$ qui à un polynôme P associe le reste de AP dans la division euclidienne par B .

1. Montrer que ϕ est linéaire.
2. Montrer que ϕ est un automorphisme ssi A et B sont premiers entre eux.

EXERCICE 19. ♣ – ●●○ *Suite exacte d'espaces vectoriels*

Soient E_0, \dots, E_n des espaces vectoriels de dimension finie respectivement égale à a_0, \dots, a_n . On suppose qu'il existe n applications linéaires f_0, \dots, f_{n-1} telles que, pour chaque $k \in \{0, \dots, n-1\}$, f_k est une application linéaire de E_k dans E_{k+1} et

- a) f_0 est injective ;
- b) $\text{Ker}(f_k) = \text{Im}(f_{k-1})$ pour tout $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$;
- c) f_{n-1} est surjective.

Montrer que $\sum_{k=0}^n (-1)^k a_k = 0$.

EXERCICE 20. ♣/◇ – ●●○ *Interpolation de Hermite*

Soit x_1, \dots, x_n des réels deux à deux distincts. Soient y_1, \dots, y_n et z_1, \dots, z_n des réels.

1. Montrer qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$ tel que

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, P(x_i) = y_i \text{ et } P'(x_i) = z_i.$$

2. Déterminer une formule explicite pour ce polynôme.

EXERCICE 21. ●●○ *Somme d'images, somme de noyaux*

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, soient $u, v \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que

$$E = \text{Im } u + \text{Im } v = \text{Ker } u + \text{Ker } v.$$

Montrer que les deux sommes sont directes.

EXERCICE 22. ◇ – ●●○ *Endomorphismes à noyau contraint*

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie, soit G un sous-espace vectoriel de E . On définit $A = \{u \in \mathcal{L}(E, F) \mid G \subset \text{Ker}(u)\}$.

Montrer que A est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E, F)$ et déterminer sa dimension.

EXERCICE 23. ♣ – ●●○ *Endomorphisme à noyau et image prescrits*

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E . Donner une condition nécessaire et suffisante sur (F, G) pour qu'il existe $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\text{Ker } u = F$ et $\text{Im } u = G$.

EXERCICE 24. ●●○ *Commutant d'un projecteur*

Soit p un projecteur de rang r dans un espace vectoriel E de dimension finie n . On considère le commutant de p : $\mathcal{C}(p) = \{u \in \mathcal{L}(E) \mid u \circ p = p \circ u\}$.

Montrer que $\mathcal{C}(p)$ est un sous-espace vectoriel et un sous-anneau de $\mathcal{L}(E)$. Déterminer sa dimension.

EXERCICE 25. ♣ – ●●○ *Dimensions de sous-espaces d'endomorphismes*

Soit E un espace vectoriel de dimension n , soit $u \in \mathcal{L}(E)$ de rang r . Déterminer la dimension des espaces vectoriels suivants :

1. $A = \{v \in \mathcal{L}(E) \mid v \circ u = 0\}$
2. $B = \{v \in \mathcal{L}(E) \mid u \circ v = 0\}$
3. $C = A \cap B$
4. $D = \{v \in \mathcal{L}(E) \mid u \circ v \circ u = 0\}$.

EXERCICE 26. ♣ – ●●○ *Endomorphisme cyclique*

Soit E un espace vectoriel de dimension n , soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

On suppose qu'il existe $x_0 \in E$ tel que $(x_0, u(x_0), \dots, u^{n-1}(x_0))$ est une base de E .

Montrer que le commutant de u est égal à $\mathbb{K}[u] = \{P(u), P \in \mathbb{K}[X]\}$.

EXERCICE 27. ●●○ *$fg - gf = \alpha g$*

Soient E un espace vectoriel de dimension finie, $f, g \in \mathcal{L}(E)$ et $\alpha \in \mathbb{K}$ tels que $fg - gf = \alpha g$.

1. Déterminer $fg^k - g^k f$, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.
2. En déduire que g est nilpotente.

EXERCICE 28. ♣ – ●●○ *Inégalité de Frobenius*

Soit u, v et w trois endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie E . Montrer

$$\operatorname{rg}(uv) + \operatorname{rg}(vw) \leq \operatorname{rg}(v) + \operatorname{rg}(uvw).$$

EXERCICE 29. ♣/◇ – ●●○ *Lemme des noyaux*

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$. On suppose que $P \wedge Q = 1$ et que $(PQ)(u) = 0$. Montrer que

$$E = \operatorname{Ker}(P(u)) \oplus \operatorname{Ker}(Q(u)).$$

4 Formes linéaires, hyperplans, dualité

EXERCICE 30. ♣ – ●●○ *Formes linéaires de $\mathbb{R}_n[X]$*

Dans $E = \mathbb{R}_n[X]$, on considère les formes linéaires $\phi_k \in E^*$, définies par $\forall P \in E, \phi_k(P) = P^{(k)}(0)$. Montrer que la famille $(\phi_k)_{k=0}^n$ est une base de E^* .

EXERCICE 31. ♣/◇ – ●●○ *Base du dual*

Soit E un espace vectoriel de dimension n . Soient ϕ_1, \dots, ϕ_n des formes linéaires sur E .

Montrer que (ϕ_1, \dots, ϕ_n) est une base de E^* ssi $\bigcap_{i=1}^n \operatorname{Ker} \phi_i = \{0\}$.

EXERCICE 32. ●●○ *Hyperplan évitant une partie dénombrable*

Soit D une partie dénombrable de $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

Montrer qu'il existe un hyperplan H de \mathbb{R}^n tel que $H \cap D = \emptyset$.

EXERCICE 33. ●●○ *Un résultat de dualité*

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $f_1, \dots, f_n \in E^*$. Soit $f \in E^*$ tel que

$$\forall x \in E, (f_1(x) = f_2(x) = \dots = f_n(x) = 0) \implies f(x) = 0.$$

Montrer que f est combinaison linéaire des f_1, \dots, f_n .

EXERCICE 34. ●●○ *Recouvrement dénombrable d'un espace par des hyperplans*

On admet que \mathbb{R} n'est pas dénombrable.

1. Soit \mathbb{K} un corps quelconque et E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension infinie.

Montrer qu'il existe une suite $(H_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'hyperplans de E telle que $E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} H_n$.

2. Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie.

Montrer qu'il n'existe pas de suite $(H_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'hyperplans de E telle que $E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} H_n$.

5 Autres exercices

EXERCICE 35. ♣ – ●●○ *Rang d'une famille de dérivées*

Soit (f_1, \dots, f_n) une famille libre de fonctions dérivables $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Montrer que

$$\text{rg}(f'_1, \dots, f'_n) \geq n - 1.$$

EXERCICE 36. ♣/◇ – ●●○ *Polynômes de Hilbert*

Pour tout k dans \mathbb{N} , on pose $P_k = \frac{X(X-1)\dots(X-k+1)}{k!}$.

1. Montrer que la famille $(P_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{R}[X]$.
2. Montrer que, pour tout $m \in \mathbb{Z}$ et tout $k \in \mathbb{N}$, $P_k(m) \in \mathbb{Z}$.
3. Déterminer l'ensemble des polynômes de $\mathbb{R}[X]$ prenant des valeurs entières sur chaque entier.

EXERCICE 37. ◇ – ●●○ *Cardinal d'un corps fini*

Montrer que le cardinal d'un corps fini est de la forme p^n , où $p \in \mathbb{P}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

EXERCICE 38. ♣ – ●●○ *Idéaux à droite de $\mathcal{L}(E)$*

Soit E un espace vectoriel de dimension n . Si F est un sous-espace vectoriel de E , on pose

$$\mathcal{I}_F = \{f \in \mathcal{L}(E) \mid \text{Im } f \subset F\}.$$

1. Montrer que \mathcal{I}_F est un idéal à droite¹ de $\mathcal{L}(E)$.
Calculer sa dimension en tant que sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.
2. Montrer réciproquement que tout idéal à droite de $\mathcal{L}(E)$ est de la forme \mathcal{I}_F , pour un sous-espace vectoriel F de E .
3. Montrer que si \mathcal{I} est un idéal à droite de $\mathcal{L}(E)$, il existe un projecteur $p \in \mathcal{I}$ tel que $\mathcal{I} = \{p \circ f, f \in \mathcal{L}(E)\}$.

EXERCICE 39. ♣ – ●●○ *Dénombrement sur un corps fini*

Soit E un espace vectoriel de dimension n , sur un corps fini \mathbb{F} de cardinal q .

1. Déterminer les cardinaux de E et $\mathcal{L}(E)$.
2. Déterminer le nombre de bases de E . En déduire $|\text{GL}(E)|$.
3. Déterminer le nombre de sous-espaces vectoriels de E de dimension p , où $p \in \llbracket 1, n \rrbracket$.
4. Déterminer le nombre d'endomorphismes de E de rang r , où $r \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$.

¹Dans un anneau A non commutatif, un idéal à droite est une partie \mathcal{I} de A qui est un sous-groupe additif de A et qui vérifie : $\forall a \in A, \forall x \in \mathcal{I}, xa \in \mathcal{I}$.

Indications

Exercice 5. Pour 1., considérer la réunion d'une base de F et d'une base de G .

Exercice 8. Déterminer une inégalité entre $\dim \bigcap_{i=1}^k F_i$ et $\dim \bigcap_{i=1}^{k+1} F_i$, pour $k \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket$.

Exercice 12. Pour 1., une application linéaire est entièrement déterminée par son image sur une partie génératrice. Pour 2., considérer $E = \mathbb{R}[X]$.

Exercice 13. Écrire l'image de u comme somme directe de r droites.

Exercice 20. Pour 1., convertir le problème en une question de surjectivité d'une application linéaire. Pour 2., procéder comme avec les polynômes de Lagrange.

Exercice 22. Une application linéaire $u \in \mathcal{L}(E, F)$ est connue sur G (car elle y est nulle). Elle est donc déterminée par son comportement sur un supplémentaire de G .

Exercice 29. Commencer par traduire l'hypothèse $P \wedge Q = 1$, pour en déduire une relation entre les endomorphismes $P(u)$ et $Q(u)$.

Exercice 31. Un vecteur x est nul ssi $\ell(x) = 0$, pour toute forme linéaire ℓ . (pourquoi ?)

Exercice 36. Pour 3., écrire un tel polynôme dans la base de Hilbert.

Exercice 37. Montrer que tout corps fini contient un sous-corps isomorphe à un \mathbb{F}_p , et qu'il peut être vu comme un espace vectoriel sur ce sous-corps.