DM 13B - Polynômes de Bernoulli - Formule d'Euler-Maclaurin

Dans ce problème, on définit les polynômes et les nombres de Bernoulli, qui interviennent dans de nombreuses formules mathématiques. On les utilise, d'une part, pour donner le développement limité de la fonction tangente à tout ordre et, d'autre part, pour établir la formule d'Euler-Maclaurin, formule asymptotique reliant

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) \text{ et } \int_1^n f(x)dx,$$

si f est une fonction suffisamment régulière.
En application de cette formule, on montre la formule de Faulhaber – formule close pour les sommes $\sum_{k=1}^{n} k^d$, où $d \in \mathbb{N}$ – et on donne le développement asymptotique de $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1 Polynômes et nombres de Bernoulli

On définit la suite de polynômes $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $A_0 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, A'_{n+1} = A_n \text{ et } \int_0^1 A_{n+1}(t)dt = 0.$$

Les polynômes $B_n = n!A_n$ sont les polynômes de Bernoulli.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $a_n = A_n(0)$ et $b_n = B_n(0) = n!a_n$.

1. Montrer que la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.
   Déterminer le degré de A_n et préciser A_1, A_2, A_3.

2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_n = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} \frac{X^k}{k!}$.

3. En déduire que, pour tout $n \geq 1$, $a_n = -\sum_{k=2}^{n+1} \frac{a_{n-k+1}}{k!}$.

2 Développement limité de tangente

On définit $f :]-2\pi, 2\pi[\to \mathbb{C}$ par $f(x) = \begin{cases} \frac{ix}{e^{ix}-1} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

4. Montrer que f admet un développement limité à tout ordre en 0.
   On ne cherchera pas à le calculer.

5. Calculer, pour tout $n \geq 1$, le développement limité à l'ordre n en 0 de $x \mapsto (e^{ix}-1)\sum_{k=0}^{n} a_k (ix)^k$.
   En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le développement limité à l'ordre n de f en 0 est :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (ix)^k + o(x^n).$$

6. Montrer que pour tout $x \in]-2\pi, 2\pi[-\{0\}$,

$$f(x) = \frac{x}{2}\operatorname{cotan}\left(\frac{x}{2}\right) - i\frac{x}{2}.$$

En déduire que les a_k pour $k \geq 3$ impair sont nuls et déterminer le développement limité à tout ordre de $x \mapsto x \operatorname{cotan} x$ en 0.

7. Montrer – en précisant son domaine de validité – l'identité $\tan(x) = \operatorname{cotan}(x) - 2\operatorname{cotan}(2x)$. En déduire le développement limité à tout ordre de la fonction tangente en 0.

3 Formule d'Euler-Maclaurin et applications

3.1 Formule sommatoire d'Euler-Maclaurin

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit $\widetilde{A_n} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \widetilde{A_n}(t) = A_n\big(\{t\}\big),$$

où $\{t\} = t - \lfloor t \rfloor$ est la partie fractionnaire de t.

8. Justifier que $\widetilde{A_n}$ est 1-périodique, pour tout $n \in \mathbb{N}$, et qu'elle est continue pour tout $n \in \mathbb{N}-\{1\}$.

Soient $m < n$ deux entiers. Soit $d \in \mathbb{N}^*$, soit $f : [m, n] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^d$.

9. Soit $p \in [\![m, n-1]\!]$. Montrer que :

$$\frac{f(p)+f(p+1)}{2} = \int_p^{p+1} f(t)dt + \sum_{k=2}^{d} a_k\big(f^{(k-1)}(p+1) - f^{(k-1)}(p)\big) + (-1)^{d+1}\int_p^{p+1} A_d(t-p)f^{(d)}(t)dt.$$

10. En déduire[1] la formule sommatoire d'Euler-Maclaurin :

$$\sum_{k=m}^{n} f(k) = \int_m^n f(t)dt + \frac{f(m)+f(n)}{2} + \sum_{k=2}^{d} a_k\big(f^{(k-1)}(n) - f^{(k-1)}(m)\big) + (-1)^{d+1}\int_m^n \widetilde{A_d}(t)f^{(d)}(t)dt.$$

3.2 Formule de Faulhaber

Soient $n \in \mathbb{N}, d \in \mathbb{N}^*$.

11. En déduire la formule de Faulhaber :

$$\sum_{k=0}^{n} k^d = \frac{1}{d+1}\left(n^{d+1} + \frac{d+1}{2}n^d + \sum_{k=2}^{d} b_k \binom{d+1}{k} n^{d+1-k}\right).$$

12. En déduire un développement asymptotique à deux termes de $S_n = \sum_{k=0}^{n} k^d$, quand n tend vers $+\infty$.

[1] Pour $d = 1$, on intègre à droite une fonction non continue en les points entiers. On prendra comme *définition* de $\int_m^n \widetilde{A_1}(t)f'(t)dt$ la somme $\sum_{p=m}^{n-1}\int_p^{p+1} A_1(t-p)f'(t)dt$.

3.3 Développement asymptotique de la série harmonique

Si g est une fonction continue sur $[a, +\infty[$, on écrit $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(t)dt$ pour la limite, quand A tend vers $+\infty$, de $\displaystyle\int_a^A g(t)dt$ – à supposer que cette limite existe.

Soit $d \geq 2$, on note $f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}, t \mapsto \dfrac{1}{t}$.

13. Montrer que $\widetilde{A_d}$ est bornée sur $\mathbb{R}$.
    En déduire que $\widetilde{A_d}(t) f^{(d)}(t) = O(t^{-d-1})$ au voisinage de $+\infty$.

On en déduit[2] que, pour tout $a \geq 1$, l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} \widetilde{A_d}(t) f^{(d)}(t) dt$ est bien définie.

14. Pour tout $n \geq 1$, on note $I_n = \displaystyle\int_n^{+\infty} \widetilde{A_d}(t) f^{(d)}(t) dt$.
    Montrer que $I_n = O(n^{-d})$ quand n tend vers $+\infty$.
15. En utilisant la formule sommatoire d'Euler-Maclaurin, montrer qu'il existe une constante[3] γ telle que

$$H_n = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} + \sum_{k=2}^{d-1} \frac{(-1)^{k-1} b_k}{k} \frac{1}{n^k} + O(n^{-d}).$$

[2]Programme de deuxième année.

[3]$\gamma \cong 0,577$ est la constante d'Euler-Mascheroni. Le calcul de γ comme limite de $H_n - \ln n$ est extrêmement lent. C'est par la formule d'Euler-Mascheroni qu'Euler en a calculé les 16 premières décimales, en 1781.