DS 6 de mathématiques

Durée : 4 heures. Les calculatrices et autres technologies sont interdites.

Si vous repérez une possible erreur d'énoncé, vous êtes invité(e) à venir le signaler.

1 Exercice – Calculs

1. Déterminer une base du sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par les vecteurs $u_1 = (1, 7, 11, 3)$, $u_2 = (0, 4, 6, 2)$, $u_3 = (2, -2, -2, -2)$ et $u_4 = (3, -1, 0, -2)$.
2. On note F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par $(1, 2, 3, 4)$ et $(1, 4, 4, 7)$; G celui engendré par $(1, 1, 1, 1)$ et $(4, 3, 5, 4)$.
   (a) Déterminer une base de $F \cap G$.
   (b) En déduire que $F + G$ est un hyperplan de $\mathbb{R}^4$; puis déterminer une forme linéaire $\ell \in (\mathbb{R}^4)^*$ telle que $F + G = \operatorname{Ker} \ell$

2 Problème – Racine carrée d'un endomorphisme

On désigne par n un entier naturel non nul, par $\mathbb{K}$ le corps des réels ou des complexes et par E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n. Dans ce problème, on s'intéresse à l'étude des racines carrées d'éléments dans les anneaux $\mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$:

- Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, une racine carrée de A est une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $B^2 = A$.
- Si $f \in \mathcal{L}(E)$, une racine carrée de f est un endomorphisme $g \in \mathcal{L}(E)$ tel que $g^2 = f$.

Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on note f_M l'endomophisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé à M.
On rappelle aussi que :

- Si $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$ et si $f \in \mathcal{L}(E)$, on note $P(f) = \sum_{k=0}^{d} a_k f^k$, avec $f^0 = \mathrm{id}_E$. L'application $P \mapsto P(f)$, définie de $\mathbb{K}[X]$ dans $\mathcal{L}(E)$ est linéaire et un morphisme d'anneaux. En particulier, $P(f) \circ Q(f) = (PQ)(f) = (QP)(f) = Q(f) \circ P(f)$ si $P, Q \in \mathbb{K}[X]$.
- Un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ est nilpotent s'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $f^N = 0$.
- Un sous-espace vectoriel F de E est stable par f si $f(F) \subset F$. Alors, la restriction $f_{|F}$ est à valeurs dans F et peut (avec un léger abus) être considérée comme un endomorphisme de F.

2.1 Questions préliminaires

1. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que B est une racine carrée de A ssi f_B est une racine carrée de f_A.

2. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, soit $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. Montrer que B est une racine carrée de A ssi PBP^{-1} est une racine carrée de PAP^{-1}.

2.2 Exemples

3. **Racines carrées de I_2.** Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$.
   (a) A quelle condition la famille $\big((1,\lambda),(\mu,1)\big)$ est-elle une base de $\mathbb{K}^2$?
   (b) On suppose cette condition satisfaite et on note $s_{\lambda,\mu}$ la symétrie par rapport à $\mathrm{Vect}\,\big((1,\lambda)\big)$ parallèlement à $\mathrm{Vect}\,\big((\mu,1)\big)$. Déterminer la matrice $M_{\lambda,\mu}$ de $s_{\lambda,\mu}$ et justifier sans calculs que $M_{\lambda,\mu}$ est une racine carrée de I_2.

4. **Racines carrées de $-\mathrm{id}_E$.** Dans cette question, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. On souhaite montrer que $-\mathrm{id}_E$ a une racine carrée ssi n est pair.
   (a) On suppose que n est pair. On écrit $n = 2p$ et on fixe une base $(e_1, e_2, \ldots, e_{2p-1}, e_{2p})$ de E. Justifier qu'il existe un unique $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que
   $$\forall k \in [\![1, p]\!], f(e_{2k-1}) = e_{2k} \text{ et } f(e_{2k}) = -e_{2k-1}.$$
   Montrer que $f^2 = -\mathrm{id}_E$.

   On suppose désormais que n est impair. On raisonne par l'absurde en supposant l'existence de $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 = -\mathrm{id}_E$.
   (b) On se donne un sous-espace vectoriel strict F de E stable par f. On fixe un vecteur $x \in E \setminus F$. Montrer que $G = \mathrm{Vect}\,\big(x, f(x)\big)$ est un sous-espace vectoriel de E de dimension 2 et qu'il est stable par f.
   (c) Montrer que F et G sont en somme directe.
   (d) Aboutir à une contradiction.

5. **Matrices diagonales régulières.** Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ deux à deux distincts. On note $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ la matrice diagonale $D = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$.
   (a) Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une racine carrée de D. Montrer que B et D commutent. En déduire que B est diagonale.
   (b) On suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Montrer que D admet toujours une racine carrée et préciser le nombre de racines carrées de D, en distinguant deux cas.
   (c) On suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Déterminer une condition sur les λ_k pour que D ait une racine carrée. Le cas échéant, préciser le nombre de racines carrées de D.

(d) On note $A = \begin{pmatrix} 11 & -5 & 5 \\ -5 & 3 & -3 \\ 5 & -3 & 3 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
Montrer que P est inversible, calculer P^{-1} et $P^{-1}AP$.
En déduire le nombre de racines carrées de A.

2.3 Décomposition de Fitting

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note $N_k = \mathrm{Ker}(f^k)$ et $I_k = \mathrm{Im}(f^k)$.

6. Montrer que la suite $(N_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est croissante pour l'inclusion. En déduire que cette suite est stationnaire.

On note p un entier tel que $\forall k \geq p, N_k = N_p$.

7. Montrer que N_p et I_p sont supplémentaires dans E et qu'ils sont stables par f.
8. On note f_N et f_I les restrictions de f à N_p et I_p (considérées comme des endomorphismes de ces espaces). Montrer que f_N est nilpotente et que f_I est un isomorphisme.
9. Montrer que f a une racine carrée ssi f_N et f_I ont une racine carrée.

Cette décomposition ramène l'étude de l'existence d'une racine carrée d'un endomorphisme aux cas où l'endomorphisme est inversible ou nilpotent, que l'on traite dans les parties suivantes.

2.4 Le cas inversible

Dans cette partie, $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et f est un isomorphisme de E. On souhaite montrer que f a une racine carrée.

10. Montrer que la famille $(f^k)_{k\in\mathbb{N}}$ est liée dans $\mathcal{L}(E)$.
11. En déduire l'existence de $P \in \mathbb{C}[X] \setminus \{0\}$ tel que $P(f) = 0$. Montrer qu'on peut de plus supposer P unitaire et $P(0) \neq 0$.

On fixe un tel polynôme P dont on note $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in \mathbb{C}^*$ les racines distinctes, de multiplicité respective $m_1, \dots, m_r$. Pour tout $k \in [\![1, r]\!]$, on note $P_k = (X - \alpha_k)^{m_k}$, de sorte que $P = P_1 P_2 \dots P_r$. Enfin, on note $E_k = \mathrm{Ker}\big(P_k(f)\big) = \mathrm{Ker}\big((f - \alpha_k \,\mathrm{id}_E)^{m_k}\big)$, pour $k \in [\![1, r]\!]$.

12. Justifier l'existence de polynômes $U_1, \dots, U_r \in \mathbb{C}[X]$ tels que $\displaystyle\sum_{k=1}^{r} U_k \prod_{\substack{1\leq i\leq r \\ i\neq k}} P_i = 1$.
13. En déduire que $E = E_1 \oplus E_2 \oplus \cdots \oplus E_r$.

14. Soit $k \in [\![1, r]\!]$. Montrer que E_k est stable par f et que la restriction f_k de f à E_k est de la forme $\alpha_k(\mathrm{id}_{E_k} + u_k)$, où u_k est un endomorphisme nilpotent de E_k.

15. On souhaite définir une suite $(R_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathbb{Q}[X]$ tels que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $R_k \in \mathbb{Q}_k[X]$ et X^{k+1} divise $R_k^2 - (1 + X)$.

    (a) Montrer l'existence de tels polynômes R_k pour $k \leq 2$.

    (b) On suppose R_k construit pour un entier k fixé. Montrer que pour une valeur bien choisie de $\alpha_k \in \mathbb{Q}$, $R_{k+1} = R_k + \alpha_k X^{k+1}$ convient.

    Ceci montre l'existence d'une telle suite $(R_k)_{k\in\mathbb{N}}$ par récurrence.

16. Montrer qu'il existe un entier N tel que, pour tout $k \in [\![1, r]\!], R_N(u_k)$ est une racine carrée de $\mathrm{id}_{E_k} + u_k$.

17. Conclure quant à l'existence d'une racine carrée de f.

2.5 Le cas nilpotent

Dans cette partie, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et f est un endomorphisme nilpotent de E. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note $N_k = \operatorname{Ker} f^k$, $d_k = \dim N_k$ et $p_k = d_{k+1} - d_k$.

18. Soit $k \in \mathbb{N}$. On fixe un supplémentaire S de N_{k+1} dans N_{k+2}. Montrer que $f_{|S}$ est injective, à valeur dans N_{k+1} et que $f(S)$ et N_k sont en somme directe.

On appelle *partition* de l'entier n une suite $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ d'entiers naturels, décroissante et stationnaire en 0, telle que $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} a_k = n$.

19. Montrer que $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une partition de n.
    C'est la partition de n associée à l'endomorphisme nilpotent f.

On suppose désormais que f admet une racine carrée g.

20. Montrer que g est nilpotent. On note $(q_\ell)_{\ell\in\mathbb{N}}$ la partition de n associée à g ; montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $p_k = q_{2k} + q_{2k+1}$.

On appelle *racine carrée d'une partition* $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une partition $(b_\ell)_{\ell\in\mathbb{N}}$ telle que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $a_k = b_{2k} + b_{2k+1}$.

21. Montrer qu'une partition $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ admet une racine carrée ssi il n'existe pas d'indice $k \in \mathbb{N}$ tel que les deux entiers consécutifs a_k et a_{k+1} soient égaux et impairs.

Ceci donne une condition nécessaire pour qu'un endomorphisme nilpotent admette une racine carrée. Avec davantage de travail, on montrerait que cette condition est aussi suffisante.