DS 6 de mathématiques

Durée : 4 heures. Les calculatrices et autres technologies sont interdites.

Si vous repérez une possible erreur d'énoncé, vous êtes invité(e) à venir le signaler.

1 Exercice – Calculs

1. On note M la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 7 & 4 & -2 & -1 \\ 11 & 6 & -2 & 0 \\ 3 & 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$ dont les colonnes correspondent aux u_k.

   Le ssev de $\mathbb{R}^4$ engendré par les u_k est l'image de la matrice M ; on peut l'obtenir en échelonnant M sur les colonnes.
   On retire 2 fois $C1$ à $C3$ et 3 fois $C1$ à $C4$:
   $$M \sim_C \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 4 & -16 & -22 \\ 11 & 6 & -24 & -33 \\ 3 & 2 & -8 & -11 \end{pmatrix}.$$
   On constate que les 3 dernières colonnes sont colinéaires à la deuxième. Donc, u_1 et u_2 engendrent déjà $\mathrm{Vect}(u_1, u_2, u_3, u_4)$; comme u_1 et u_2 ne sont pas colinéaires, ils forment une base de ce ssev.

2. (a) On cherche $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ des réels tels que $\alpha(1,2,3,4) + \beta(1,4,4,7) + \gamma(1,1,1,1) + \delta(4,3,5,4) = 0$. Cela revient à résoudre le système linéaire homogène $AX = 0$, où $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 5 \\ 4 & 7 & 1 & 4 \end{pmatrix}$. En enlevant un multiple de la ligne 1 aux suivantes, on a :
   $$A \sim_L \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & -1 & -5 \\ 0 & 1 & -2 & -7 \\ 0 & 3 & -3 & -12 \end{pmatrix}.$$
   On échange les lignes 2 et 3 ; on remarque que la ligne 4 est la somme des lignes

2 et 3, donc :

$$A \sim_L \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & -7 \\ 0 & 2 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim_L \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On trouve donc une droite de solutions pour $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$. En prenant $\delta = 1$, on trouve $\gamma = -3$, puis $\beta = 7\delta + 2\gamma = 1$ et $\alpha = -4\delta - \gamma - \beta = -2$. Ainsi, le vecteur $2(1, 2, 3, 4) - (1, 4, 4, 7) = -3(1, 1, 1, 1) + (4, 3, 5, 4) = (1, 0, 2, 1)$ engendre $F \cap G$; il en est donc une base.

(b) Comme F et G sont tous les deux engendrés par deux vecteurs non colinéaires, ils sont de dimension 2. Comme leur intersection est de dimension 1, on a par la formule de Grassmann que $\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim F \cap G = 2 + 2 - 1 = 3$. Comme $\mathbb{R}^4$ est de dimension 4, $F + G$ est un hyperplan de $\mathbb{R}^4$. Le ssev $F + G$ a pour base $\big((1, 2, 3, 4), (1, 4, 4, 7), (1, 1, 1, 1)\big)$: en effet, les deux premiers vecteurs forment une base de F et le troisième est dans G, donc n'est pas combinaison linéaire des deux premiers (sinon il serait dans $F \cap G$). Soit $u = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$. Il est dans $F + G$ ssi on peut trouver $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha(1, 2, 3, 4) + \beta(1, 4, 4, 7) + \gamma(1, 1, 1, 1) = (x, y, z, t)$. On écrit le système linéaire correspondant et on échelonne ; la ligne 0 = ... donne les conditions de compatibilité. On trouve $x - y - z + t = 0$. C'est une équation de l'hyperplan $F + G$; et la forme linéaire recherchée est $\ell(x, y, z, t) = x - y - z + t$.
Les calculs peuvent être faits au brouillon. Si on trouve l'équation, on peut simplement remarquer que les vecteurs engendrant $F + G$ la vérifient bien et conclure par un argument de dimension.

2 Problème – Racine carrée d'un endomorphisme

2.1 Questions préliminaires

1. On sait que l'application $M \mapsto f_M$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$ est un isomorphisme d'anneaux. Donc, si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a les équivalences :

$$B^2 = A \iff f_{B^2} = f_A \iff (f_B)^2 = f_A.$$

2. Si $B^2 = A$, on a $(PBP^{-1})^2 = (PBP^{-1})(PBP^{-1}) = PB^2P^{-1} = PAP^{-1}$. Réciproquement, si $(PBP^{-1})^2 = PAP^{-1}$, on a $PB^2P^{-1} = PAP^{-1}$ et donc $B^2 = A$ en multipliant à gauche par P^{-1} et à droite par P.

2.2 Exemples

3. **Racines carrées de I_2.**

   (a) C'est une famille de deux vecteurs dans un espace de dimension 2. C'est donc une base ssi elle est libre ssi les deux vecteurs ne sont pas colinéaires ssi $1 \times 1 - \lambda \times \mu \neq 0$ ssi $\lambda\mu \neq 1$.

   (b) On remarque que $(1,0) = \dfrac{1}{1-\lambda\mu}\big((1,\lambda) - \lambda(\mu,1)\big)$, de sorte que $s_{\lambda,\mu}(1,0) = \dfrac{1}{1-\lambda\mu}\big((1,\lambda) + \lambda(\mu,1)\big) = \dfrac{1}{1-\lambda\mu}(1+\lambda\mu, 2\lambda)$.
   De même, $(0,1) = \dfrac{1}{1-\lambda\mu}\big(-\mu(1,\lambda)+(\mu,1)\big)$ et donc $s_{\lambda,\mu}(0,1) = \dfrac{1}{1-\lambda\mu}(-2\mu, -1-\lambda\mu)$. La matrice $M_{\lambda,\mu}$ est donc :
   $$M_{\lambda,\mu} = \frac{1}{1-\lambda\mu}\begin{pmatrix} 1+\lambda\mu & -2\mu \\ 2\lambda & -(1+\lambda\mu) \end{pmatrix}.$$
   Comme $s_{\lambda,\mu}$ est une symétrie, elle vérifie $s_{\lambda,\mu}^2 = \mathrm{id}_{\mathbb{K}^2}$: c'est donc une racine carrée de $\mathrm{id}_{\mathbb{K}^2}$. Donc, $M_{\lambda,\mu}$ est une racine carrée de I_2.

4. **Racines carrées de $-\mathrm{id}_E$.**

   (a) On sait qu'il existe un unique endomorphisme de E dont les valeurs sur une base de E sont prescrites. D'où l'existence et l'unicité de f.
   Soit $k \in [\![1,p]\!]$. On a $f^2(e_{2k-1}) = f(e_{2k}) = -e_{2k-1}$ et $f^2(e_{2k}) = f(-e_{2k-1}) = -e_{2k}$. Donc, f^2 et $-\mathrm{id}_E$ coïncident sur tous les éléments de la base $(e_1, \dots, e_{2p})$, donc $f^2 = -\mathrm{id}_E$.

   (b) Le vecteur x est non nul puisqu'il n'est pas dans F. Si G était de dimension 1, $f(x)$ serait colinéaire à x, donc de la forme αx pour un certain $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors, on aurait $f^2(x) = f(\alpha x) = \alpha^2 x$. Comme $f^2 = -\mathrm{id}_E$ et que $x \neq 0$, on aurait $\alpha^2 = -1$, ce qui n'est pas. Donc, G est de dimension 2.
   Comme $f(x) \in G$ et que $f(f(x)) = -x \in G$, les deux vecteurs x et $f(x)$ sont envoyés par f dans G. Comme ils engendrent G, G est stable par f.

   (c) Soit $u \in G \setminus \{0\}$. Pour les mêmes raisons qu'à la question précédente, $(u, f(u))$ est libre, donc génératrice de G qui est de dimension 2. Donc, x est combinaison linéaire de u et $f(u)$. Si u était aussi dans F, $f(u)$ serait aussi dans F (car F est stable par f) et donc x serait dans F, ce qui contredit l'hypothèse. Ainsi, $F \cap G = \{0\}$.

   (d) Par la question précédente, si F est un ssev strict de E stable par f, on peut définir un ssev de E stable par f, et de dimension $\dim F + 2$. On définit alors de proche en proche des ssev stricts de E stables par f : $\{0\} = F_0 \subset F_1 \subset \cdots \subset F_r = E$, avec $\dim F_{i+1} = 2 + \dim F_i$, pour tout i. Ainsi, E est de dimension paire, ce qui est absurde.

5. **Matrices diagonales régulières.**

   (a) On a $BD = B(B^2) = B^3 = (B^2)B = DB$. Soient $i, k \in [\![1, n]\!]$. Le coefficient (i, k) de BD est $b_{i,k}\lambda_k$; celui de DB est $\lambda_i b_{i,k}$. Comme $\lambda_i \neq \lambda_k$ si $i \neq k$, on doit avoir $b_{i,k} \neq 0$ si $i \neq k$. Donc, B est diagonale.

   (b) D'après la question précédente, les racines carrées de D sont à chercher parmi les matrices diagonales. Si $B = \text{Diag}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, on a $B^2 = \text{Diag}(\alpha_1^2, \ldots, \alpha_n^2)$. Donc, B est une racine carrée de D ssi $\forall k \in [\![1, n]\!], \alpha_k^2 = \lambda_k$. Chacune des k équations a 2 solutions si $\lambda_k \neq 0$, 1 seule si $\lambda_k = 0$. On en déduit que D a 2^n racines carrées si tous les λ_k sont non nuls ; 2^{n-1} si l'un des λ_k est nul.

   (c) Avec le même argument qu'à la question précédente, D a une racine carrée ssi tous les λ_k ont une racine carrée dans $\mathbb{R}$ ssi tous les λ_k sont positifs. La suite de l'argument est le même et le résultat identique : 2^n racines carrées si les λ_k sont strictement positifs ; 2^{n-1} si les λ_k sont positifs et que l'un est nul.

   (d) Avec l'algorithme de Gauss-Jordan, on trouve $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & -1/6 & 1/6 \\ -1/3 & -1/3 & 1/3 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -2 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$. Après calculs (cf. document annexe), $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 16 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
   Ainsi, $P^{-1}AP$ admet 4 racines racines carrées d'après la question précédente ; d'après la question 2., A aussi.

2.3 Décomposition de Fitting

6. Soit $k \in \mathbb{N}$. Soit $x \in N_k$. Alors, $f^k(x) = 0$ et donc $f^{k+1}(x) = 0$. Donc, $x \in N_{k+1}$; donc $N_k \subset N_{k+1}$ et la suite des N_k est croissante.
   La suite des $\dim N_k$ est donc aussi croissante ; c'est une suite d'entiers majorée par $\dim E$, elle est donc stationnaire. Ainsi, il existe un indice p tel que si $k \geq p$, $\dim N_k = \dim N_p$. Comme pour ces k, on a $N_p \subset N_k$, on a en fait égalité $N_p = N_k$.

7. Soit $y \in N_p \cap I_p$. On peut écrire y sous la forme $y = f^p(x)$, où $x \in E$. Comme $y \in N_p$, $f^p(y) = f^{2p}(x) = 0$ et donc $x \in N_{2p}$. Comme $2p \geq p$, $N_{2p} = N_p$. Donc, $y = f^p(x) = 0$; et donc $N_p \cap I_p = 0$.
   Par le théorème du rang appliqué à f^p, on a de plus $\dim N_p + \dim I_p = \dim E$. Comme ces deux espaces sont en somme directe, ils sont donc supplémentaires.
   Montrons maintenant la stabilité par f. Si $x \in N_p$, alors $f^p(f(x)) = f^{p+1}(x) = 0$, donc N_p est stable par f. Si $y \in I_p$, on écrit $y = f^p(x)$, avec $x \in E$. Alors, $f(y) = f^{p+1}(x) = f^p(f(x)) \in I_p$ et donc I_p est stable par f.

8. Soit $x \in N_p$. On a $f_N^p(x) = f^p(x) = 0$, de sorte que f_N^p est l'endomorphisme nul de N_p. Donc, f_N est nilpotente.
   Soit $y \in I_p$. On écrit $y = f^p(x)$, pour un $x \in E$. Si $f_I(y) = 0$, alors $f^{p+1}(x) = 0$ et

donc $x \in N_{p+1} = N_p$. Par stabilité de N_p par f, on a aussi $y = f(x) \in N_p$. Ainsi, $y \in I_p \cap N_p = \{0\}$; donc $y = 0$. Ceci montre que f_I est injective. Comme c'est un endomorphisme de I_p, de dimension finie ; f_I est un isomorphisme.

9. Supposons que f admet une racine carrée g. Alors, f et g commutent (comme en 5.a). Si $x \in N_p$, $f^p(g(x)) = g(f^p(x)) = 0$, de sorte que $g(x) \in N_p$. Si $y \in I_p$, y s'écrit $f^p(x)$ et alors $g(y) = f^p(g(x)) \in I_p$. Ainsi, g laisse stable N_p et I_p ; en notant g_N et g_I les restrictions de g à ces espaces, on a alors $g_N^2 = f_N$ et $g_I^2 = f_I$.
   Supposons réciproquement que f_I et f_N admettent une racine carrée, qu'on note g_I et g_N. On peut voir g_I et g_N comme des applications linéaires à valeurs dans E, avec comme espace de départ respectivement I_p et N_p. Comme I_p et N_p sont supplémentaires, on peut trouver une unique application linéaire de E dans E (donc un endomorphisme de E) tel que g_I et g_N soient respectivement les restrictions de g à I_p et N_p. L'identité $g^2 = f$ est alors valable en restriction à I_p et à N_p ; elle est donc valable sur E tout entier car $I_p + N_p = E$.

2.4 Le cas inversible

10. L'espace vectoriel $\mathcal{L}(E)$ est de dimension finie n^2. Donc toute famille d'au moins $n^2 + 1$ vecteurs y est liée ; a fortiori la famille $(f^k)_{k \in \mathbb{N}}$ formée d'une infinité de vecteurs.

11. On peut donc trouver un entier $d \in \mathbb{N}$ et des coefficients $a_0, \dots, a_d$ non tous nuls tels que $\displaystyle\sum_{k=0}^{d} a_k f^k = 0$. Quitte à diminuer la valeur de d, on peut supposer que $a_d \neq 0$. Quitte à diviser par a_d, on peut supposer que $a_d = 1$. Si on note $r \in [\![0, d]\!]$ le premier indice tel que $a_r \neq 0$, on peut multiplier la relation précédente par f^{-r} et obtenir $\displaystyle\sum_{k=r}^{d} a_k f^{k-r} = 0$; donc $\displaystyle\sum_{\ell=0}^{d-r} a_{r+\ell} f^{\ell} = 0$, avec $a_r \neq 0$. Finalement, en posant $P = \displaystyle\sum_{\ell=0}^{d-r} a_{r+\ell} X^{\ell}$, P est bien unitaire, de coefficient constant non nul et il vérifie $P(f) = 0$.

12. Notons $Q_k = \displaystyle\prod_{\substack{1 \leq i \leq r \\ i \neq k}} P_i$ pour $k \in [\![1, r]\!]$. Les Q_k sont premiers entre eux dans leur ensemble. En effet, les seuls polynômes irréductibles intervenant dans la décomposition en produit d'irréductibles des Q_k sont les $X - \alpha_\ell$; mais $X - \alpha_\ell$ ne divise pas Q_ℓ. Ainsi, on peut trouver une relation de Bézout $\displaystyle\sum_{k=1}^{r} U_k Q_k = 1$, où les U_k sont dans $\mathbb{C}[X]$.

13. On garde les notations de la réponse précédente. En substituant f à X dans la relation précédente, on a :

$$\sum_{k=1}^{r} U_k(f) \circ Q_k(f) = \mathrm{id}_E .$$

Soit $x \in E$. en évaluant cette relation en x, on a :

$$\sum_{k=1}^{r} \big(U_k(f) \circ Q_k(f)\big)(x) = x.$$

Notons $x_k = \big(U_k(f) \circ Q_k(f)\big)(x)$. Alors, $P_k(f)(x_k) = \big(U_k(f) \circ P(f)\big)(x) = 0$ (on rappelle que tous les polynômes en f commutent). Ainsi, $x_k \in E_k$ et on a montré que $E = E_1 + \cdots + E_r$.
Considérons maintenant $j \in [\![1, r]\!]$ et $x \in E_j \cap \big(\sum_{\substack{1 \leq i \leq r \\ i \neq j}} E_i\big)$. Ainsi, $x \in E_j$ et x peut aussi s'écrire $x = \sum_{\substack{1 \leq i \leq r \\ i \neq j}}$, où $x_i \in E_i$ pour tout i. Comme x est dans E_j, il est annulé par tous les $Q_k(f)$, pour $k \neq j$ (car $Q_k(f)$ a pour facteur l'endomorphisme $P_j(f)$). La relation précédente donne donc :

$$\big(U_j(f) \circ Q_j(f)\big)(x) = x.$$

Mais chaque x_i est annulé par $Q_j(f)$ car $P_i(f)$ est un facteur de $Q_j(f)$. Donc, on a finalement $0 = x$. Comme j était quelconque, on a montré le caractère direct de la somme : $E = E_1 \oplus E_2 \oplus \cdots \oplus E_r$.

14. Soit $x \in E_k$. Alors, $P_k(f)\big(f(x)\big) = f\big(P_k(f)(x)\big) = 0$, donc $f(x) \in E_k$. Ceci montre que E_k est stable par f.
Par définition, si $x \in E_k$, on a $(f_k - \alpha_k \,\mathrm{id}_{E_k})^{m_k}(x) = (f - \alpha_k \,\mathrm{id}_E)^{m_k}(x) = 0$. Ainsi, $f_k - \alpha_k \,\mathrm{id}_{E_k}$ est un endomophisme nilpotent de E_k. On écrit alors $f_k = \alpha_k(\mathrm{id}_{E_k} + u_k)$, avec $u_k = \dfrac{f_k}{\alpha_k} - \mathrm{id}_{E_k}$, qui est bien nilpotent.

15. (a) On pose $R_0 = 1$, $R_1 = 1 + \dfrac{X}{2}$ et $R_2 = 1 + \dfrac{X}{2} - \dfrac{X^2}{8}$. On calcule :
    - $R_0^2 - (1+X) = -X$ est bien divisible par X ;
    - $R_1^2 - (1+X) = \dfrac{X^2}{4}$ est bien divisible par X^2 ;
    - $R_2^2 - (1+X) = -\dfrac{X^3}{8} + \dfrac{X^4}{64}$ est bien divisible par X^3.

(b) Comme R_k convient par hypothèse, on peut écrire $R_k^2 = 1 + X + X^{k+1}Q_k$, où $Q_k \in \mathbb{Q}[X]$. Avec les notations de l'énoncé,

$$R_{k+1}^2 = R_k^2 + 2\alpha_k X^{k+1} R_k + \alpha_k^2 X^{2k+2} = (1+X) + X^{k+1}(Q_k + 2\alpha_k) + \alpha_k^2 X^{2k+2}.$$

Le terme $\alpha_k^2 X^{2k+2}$ est toujours divisible par X^{k+2} car $2k+2 \geq k+2$. Le terme $X^{k+1}(Q_k + 2\alpha_k)$ est divisible par X^{k+2} si (et seulement si) on choisit $\alpha_k = -\dfrac{Q_k(0)}{2}$. Pour cette valeur de α_k, R_{k+1} convient donc.

16. Tous les u_k étant nilpotents, on peut considérer un indice N tel que si $i > N$, alors $u_k^i = 0$ (*comme on ne considère qu'un nombre fini de u_k, on n'a même pas besoin de savoir majorer l'indice de nilpotence*). Pour l'entier N, on sait que $R_N^2 = (1+X) + X^{N+1}Q$, pour un certain polynôme Q. En substituant un u_k à X, on a donc : $\big(R_N(u_k)\big)^2 = R_N^2(u_k) = \mathrm{id}_{E_k} + u_k + u_k^{N+1} \circ Q(u_k) = \mathrm{id}_{E_k} + u_k$.

17. Comme $f_k = \alpha_k(\mathrm{id}_{E_k} + u_k)$, si δ_k est une racine carrée de α (*ce qui existe, puisqu'on travaille dans* $\mathbb{C}$), $\delta_k R_N(u_k)$ est une racine carrée de f_k, d'après la question précédente. On définit alors g l'unique endomorphisme de E dont la restriction à chaque E_k vaut $\delta_k R_n(u_k)$. L'identité $g^2 = f$ a lieu par construction sur chaque E_k, donc sur E, comme $E = E_1 \oplus \cdots \oplus E_r$.

2.5 Le cas nilpotent

18. Soit $x \in S$ tel que $f(x) = 0$. Alors, en particulier $f^{k+1}(x) = 0$ et donc $x \in N_{k+1}$. Comme $N_{k+1} \cap S = \{0\}$ par définition, $x = 0$. Ainsi, $f_{|S}$ est injective.
Si $x \in N_{k+2}$, on a $f^{k+2}(x) = 0$ et donc $f^{k+1}(f(x)) = 0$, c'est-à-dire $f(x) \in \mathbb{N}_{k+1}$. En particulier, $f_{|S}$ est à valeurs dans N_{k+1}.
Soit $y \in f(S) \cap N_k$. On écrit $y = f(x)$ avec $x \in S$. Comme $f^k(y) = 0$, $x \in N_{k+1}$. Comme N_{k+1} et S sont en somme directe, $x = 0$; et donc $y = 0$. Ainsi, $f(S)$ et N_k sont en somme directe.

19. La suite (p_k) est une suite d'entiers car on a pour tout k, $N_k \subset N_{k+1}$ et donc $d_k \leq d_{k+1}$. Elle est décroissante d'après la question précédente. Elle est stationnaire en 0 car, à partir d'un certain rang s, tous les N_k valent E (f étant nilpotente). Enfin, on a $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} p_k = \sum_{k=0}^{s} p_k = \sum_{k=0}^{s}(d_{k+1} - d_k) = \dim E - \dim\{0\} = n$.

20. Si $f^N = 0$, alors $g^{2N} = f^N$, donc g est nilpotent. Notons $\delta_\ell = \dim \operatorname{Ker} g^\ell$ pour tout ℓ. Alors, $q_\ell = \delta_{\ell+1} - \delta_\ell$. De plus, pour tout ℓ, $\delta_{2\ell} = \dim \operatorname{Ker} f^\ell = d_\ell$.
Si $k \in \mathbb{N}$, on a donc $q_{2k} + q_{2k+1} = \delta_{2k+2} - \delta_{2k+1} + \delta_{2k+1} - \delta_{2k} = \delta_{2k+2} - \delta_{2k} = d_{k+1} - d_k = p_k$.

21. Supposons la condition sur les a_k vérifiée. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note $b_{2k} = \lceil \frac{a_k}{2} \rceil$ et $b_{2k+1} = \lfloor \frac{a_k}{2} \rfloor$. Vérifions que ceci définit bien une partition racine carrée de la partition (a_k).

- Les b_ℓ sont nuls pour ℓ assez grand car les a_k sont nuls pour k assez grand.
- Comme $b_{2k} + b_{2k+1} = a_k$, la somme de tous les b_ℓ est égale à la somme de tous les a_k, donc à n.
- La suite (b_ℓ) est décroissante. En effet, si $\ell = 2k$, on a bien $b_{2k} = \lceil \frac{a_k}{2} \rceil \geq \lfloor \frac{a_k}{2} \rfloor = b_{2k+1}$; et si $\ell = 2k+1$, on doit vérifier que $b_{2k+1} = \lfloor \frac{a_k}{2} \rfloor \geq \lceil \frac{a_{k+1}}{2} \rceil = b_{2k+2}$. Il y a plusieurs cas :
  - Si a_k et a_{k+1} sont pairs, cela vient de ce que $a_k \geq a_{k+1}$ et du fait que les parties entière disparaissent.
  - Si a_k est pair et a_{k+1} impair, $a_k \geq a_{k+1} + 1$. De plus, $\lfloor \frac{a_k}{2} \rfloor = \frac{a_k}{2}$, et $\lceil \frac{a_{k+1}}{2} \rceil = \frac{a_{k+1} + 1}{2}$, donc l'égalité est valable.
  - Si a_k est impair et a_{k+1} pair, on a de même $a_k - 1 \geq a_{k+1}$, $\lfloor \frac{a_k}{2} \rfloor = \frac{a_k - 1}{2}$ et $\lceil \frac{a_{k+1}}{2} \rceil = \frac{a_{k+1}}{2}$.
  - Si a_k et a_{k+1} sont impairs, ils sont distincts par hypothèse, donc $\frac{a_k}{2} \geq \frac{a_{k+1}}{2} + 1$ et l'inégalité est encore vraie.

Réciproquement, supposons que (a_k) a une partition (b_ℓ). Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que a_k est impair. On a $a_k = b_{2k} + b_{2k+1}$ et $a_{k+1} = b_{2k+1} + b_{2k+2}$. Donc, b_{2k} et b_{2k+1} n'ont pas même parité ; en particulier $b_{2k} > b_{2k+1}$. Alors, $a_{k+1} = b_{2k+1} + b_{2k+2} < b_{2k} + b_{2k+1} = a_k$ (car $b_{2k+2} \leq b_{2k+1}$). Ce qui conclut.