

DS 6 de mathématiques

1 Exercice – Calculs

1. Le plus rapide est d'échelonner *en colonnes* la matrice dont les colonnes correspondent aux vecteurs u_k ; en effet, on ne change pas l'espace vectoriel engendré par (les vecteurs représentés par) les colonnes à chaque opération.
2. (a) Différentes façons de s'y prendre. Le plus naturel est de chercher quand un vecteur de F est égal à un vecteur de G . Attention à ne pas confondre d'une part les coefficients qui servent à écrire les combinaisons linéaires d'éléments de F et de G ; et d'autre part les vecteurs solutions dans $F \cap G$.
(b) La démarche a été expliquée en cours : on cherche à savoir quand $(x, y, z, t) \in F + G$, ce qui revient à déterminer quand un système est compatible.

2 Problème – Racine carrée d'un endomorphisme

2.1 Questions préliminaires

1. On n'a pas à redémontrer des propriétés du cours. Ici, le fait que $M \mapsto f_M$ est un isomorphisme d'anneaux de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vers $\mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$ (on n'est pas obligé d'invoquer explicitement cet isomorphisme, mais si on en parle, préciser la structure d'anneaux).
2. RAS

2.2 Exemples

3. (a) C'est simplement un problème de proportionnalité. On peut relier cela au déterminant de la matrice dont les colonnes correspondent aux vecteurs $(1, \lambda)$ et $(\mu, 1)$.
(b) Pour le calcul de $M_{\lambda, \mu}$, il s'agit d'exprimer les vecteurs $(1, 0)$ et $(0, 1)$ comme combinaison linéaire de $(1, \lambda)$ et $(\mu, 1)$. Les systèmes correspondants peuvent être explicitement résolus en utilisant la formule de l'inverse d'une matrice 2×2 .
4. **Racines carrées de $-\text{id}_E$.**
(a) La justification de l'existence et de l'unicité de f est du cours. Il faut cependant dire les choses proprement : *On sait qu'il existe un unique endomorphisme de E*

dont les images en les éléments d'une base sont prescrites. Le fait qu'on envoie base sur base n'est pas pertinent à ce stade.

- (b) Le fait que G est un ssev ne demande pas de vérification puisqu'un Vect est un ssev par définition. Pour la dimension 2, le fait qu'on travaille dans $\mathbb{R}$ est crucial et doit apparaître clairement.
- (c) Le plus rapide est de remarquer que si $y \in G \setminus \{0\}$, on doit aussi avoir $G = \text{Vect}(y, f(y))$ (à justifier bien sûr). On conclut vite.
- (d) Beaucoup de maladresses. Le ssev F introduit en (b) n'est plus une donnée. On ne peut donc pas raisonner avec un tel F , comme s'il était fixé (ce qui d'ailleurs ne mène à rien). Il fallait simplement comprendre qu'on est capable, étant donné un ssev de E stable par f , d'en construire un autre de dimension 2 de plus ; une récurrence (diverse façon de l'écrire) permet de conclure.

5. Matrices diagonales régulières.

- (a) Le fait que B et D commutent est à peu près évident si on utilise $B = D^2$ et qu'on ne cherche pas à tout écrire avec des coefficients à ce stade. Le caractère diagonal de B en résulte, par un exercice vu en TD ; qu'il fallait évidemment refaire. Le fait que l'ensemble des matrices diagonales est égal à son propre commutant n'a qu'un lien indirect avec la question (la matrice diagonale D est fixée et le fait que les coefficients diagonaux sont distincts est crucial).
- (b) Bien lire l'énoncé : les λ_i sont différents.
- (c) RAS
- (d) Question calculatoire assez bien traitée. Ne pas oublier de conclure en réutilisant la question 2.

2.3 Décomposition de Fitting

- 6. Vu en TD. La rédaction est souvent confuse, avec une distinction pas toujours claire entre N_k d'une part et $\dim N_k$ d'autre part.
- 7. Également vu en TD. La stabilité par f ne pose pas de difficultés.
- 8. Pour le fait que f_I est un isomorphisme, il suffit de montrer l'injectivité ou la surjectivité (comme pour n'importe quel endomorphisme en dimension finie) ; si on considère d'injectivité, on remarque qu'un élément du noyau de f_I est à dans $I_p \cap N_p$, donc est nul par la question précédente.
- 9. Question mal traitée. Pour le sens direct, il faut montrer que si g est racine carrée de f , alors g laisse stable N_p et I_p (sinon les restrictions de g à ces espaces n'induisent pas des endomorphismes) ; pour le sens réciproque, il faut reconstruire g en *ajoutant* les deux racines carrées. cf. corrigé

2.4 Le cas inversible

10. Un simple argument de dimension finie/infinie qui doit devenir très naturel.
11. Reformulation de la question précédente et normalisation.
12. Il s'agit d'une relation de Bézout entre les polynômes $\prod_{\substack{1 \leq i \leq r \\ i \neq k}} P_i$ qui sont premiers entre eux *dans leur ensemble* – mais certainement pas deux à deux. Il est possible mais chronophage de procéder par récurrence.
13. Généralisation assez technique de l'exercice vu en TD pour le cas de deux polynômes. Il a été donné beaucoup de formules qui n'ont pas de sens (polynôme multiplié par un endomorphisme ; produit de vecteurs ; polynôme évalué en un vecteur)... La bonne manipulation des polynômes d'endomorphismes prend un peu de temps mais sera au cœur du programme de l'an prochain.
14. RAS
15. On pourra remarquer que les polynômes R_k que l'on construit sont ceux apparaissant dans le développement limité de $x \mapsto \sqrt{1+x}$. Ce n'est bien sûr pas un hasard et il est possible de partir de ce développement limité pour faire la question (mais les DL n'étaient pas au programme de révision).
 - (a) Simple calcul, pour comprendre l'argument général.
 - (b) Si on pose bien les choses, c'est un simple calcul. L'important est de correctement traduire l'hypothèse : il existe un polynôme Q_k tel que $R_k^2 - (1+X) = X^{k+1}Q_k$.
16. RAS
17. Il s'agissait de gérer les constantes α_k (on utilise ici qu'on travaille sur $\mathbb{C}$) et de définir une racine de f , composante par composante.

2.5 Le cas nilpotent

18. Ces vérifications ne posent pas problème.
19. La condition de décroissance est souvent oubliée ; mais c'est le plus important. On pourra retenir que la dimension des noyaux itérés augmente de moins en moins vite.
20. RAS
21. Question combinatoire ; en général bien traitée par ceux qui s'y sont aventurés.