DM 13B - Polynômes de Bernoulli - Formule d'Euler-Maclaurin

1 Polynômes et nombres de Bernoulli

1. On procède par récurrence sur $N \in \mathbb{N}$. Notons $\mathscr{P}(N)$ la propriété : il existe une unique famille de polynômes $(A_n)_{n \leq N}$ vérifiant $A_0 = 1$ et pour tout $n \leq N-1$, $A'_{n+1} = A_n$ et $\int_0^1 A_{n+1}(t)dt = 0$.

   Initialisation : $\mathscr{P}(0)$ est vraie puisque $A_0 = 1$ est donné dans l'énoncé.

   Hérédité : on suppose $\mathscr{P}(N)$ vraie pour un $N \in \mathbb{N}$ et on note $A_0, \dots, A_N$ les polynômes uniquement définis. Une famille satisfaisant $\mathscr{P}(N+1)$ est nécessairement de la forme $(A_0, \dots, A_N, A_{N+1})$ (par unicité de la famille $(A_0, \dots, A_N)$). De plus, cette famille convient ssi $A'_{N+1} = A_N$ et $\int_0^1 A_{N+1}(t)dt = 0$.

   Notons Q une primitive quelconque de A_N : c'est nécessairement une application polynomiale. Alors, A_{N+1} est à chercher de la forme $Q + C$, pour une constante C réelle. La condition d'intégrale nulle est équivalente à $C = -\int_0^1 Q(t)dt$, ce qui détermine la constante C. Ainsi, il existe un unique A_{N+1} satisfaisant les conditions requises. Ceci conclut la récurrence.

   Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A'_{n+1} = A_n$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\deg(A_{n+1}) = \deg A_n + 1$. Comme $\deg A_0 = 0$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}, \deg A_n = n$.

   Après calculs, on trouve :

   - $A_0 = 1$
   - $A_1 = X - \frac{1}{2}$
   - $A_2 = \frac{1}{2}X^2 - \frac{1}{2}X + \frac{1}{12}$
   - $A_3 = \frac{1}{6}X^3 - \frac{1}{4}X^2 + \frac{1}{12}X$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Par la formule de Taylor en 0, on a $A_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{A_n^{(k)}(0)}{k!} X^k$. Or, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $A_n^{(k)} = A_{n-k}$ par construction. D'où, $A_n^{(k)}(0) = A_{n-k}(0) = a_{n-k}$. Ce qui conclut.

3. Soit $n \geq 1$. On a $\int_0^1 A_n(t)dt = 0$. Donc, d'après la question précédente :

$$\left[\sum_{k=0}^{n} a_{n-k} \frac{t^{k+1}}{(k+1)!}\right]_{t=0}^{t=1} = 0.$$

   On en déduit que $a_n = -\sum_{k=1}^{n} \frac{a_{n-k}}{(k+1)!}$, ce qui donne la formule attendue après changement de variable.

2 Développement limité de tangente

4. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $e^{ix} - 1 = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(ix)^k}{k!} + o(x^{n+1})$. Donc :

$$f(x) = \frac{ix}{\sum_{k=1}^{n+1} \frac{(ix)^k}{k!} + o(x^{n+1})} = \frac{1}{\sum_{\ell=0}^{n} \frac{(ix)^\ell}{(l+1)!} + o(x^n)}.$$

C'est une expression de la forme $\frac{1}{1-u}$ avec $u = -\sum_{l=1}^{n} \frac{(ix)^\ell}{(\ell+1)!} + o(x^n)$, qui tend vers 0 quand x tend vers 0. En utilisant une substitution dans le développement limité de $\frac{1}{1-u}$, on obtiendrait un développement limité à l'ordre n de f.

Remarque : on peut en fait montrer que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$, ce qui montre en particulier qu'elle admet un développement limité à tout ordre.

5. Soit $n \geq 1$. On note $g_n(x) = (e^{ix} - 1) \sum_{k=0}^{n} a_k (ix)^k$. On a :

$$\begin{aligned}
g_n(x) &= \Big(\sum_{\ell=1}^{n} \frac{(ix)^\ell}{\ell!} + o(x^n) \Big) \sum_{k=0}^{n} a_k (ix)^k \\
&= \sum_{j=0}^{n} \Big(\sum_{\substack{1 \leq \ell \leq n \\ 0 \leq k \leq n \\ k+\ell=j}} \frac{a_k}{\ell!} \Big) (ix)^j + o(x^n) \\
&= \sum_{j=0}^{n} \Big(\sum_{k=0}^{j-1} \frac{a_k}{(j-k)!} \Big) (ix)^j + o(x^n) \\
&= (ix) \sum_{j=1}^{n} \Big(\sum_{k=0}^{j-1} \frac{a_k}{(j-k)!} \Big) (ix)^{j-1} + o(x^n) \\
&= (ix) \sum_{j=0}^{n-1} \Big(\sum_{k=0}^{j} \frac{a_k}{(j+1-k)!} \Big) (ix)^j + o(x^n)
\end{aligned}$$

Par la question 3, la somme interne est nulle pour $j \geq 1$. Donc,

$$g_n(x) = ix + o(x^n).$$

On divise cette égalité par $e^{ix} - 1$, qui est équivalent à ix :

$$\sum_{k=0}^{n} a_k (ix)^k = f(x) + o(x^{n-1}).$$

On remarque que le dernier terme de la somme peut être absorbé dans le $o(x^{n-1})$.

Ceci étant vrai pour tout $n \geq 1$, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (ix)^k + o(x^n),$$

ce qu'on voulait montrer.

6. Soit $x \in]-2\pi, 2\pi[- \{0\}$. On calcule :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Re}\big(f(x)\big) &= \mathrm{Re}\big(\frac{ix(e^{-ix}-1)}{|e^{ix}-1|^2}\big)\\
&= \frac{x\sin x}{|e^{i\frac{x}{2}} - e^{-i\frac{x}{2}}|^2}\\
&= \frac{x\sin x}{4\sin^2(x/2)}\\
&= \frac{2x\cos(x/2)\sin(x/2)}{4\sin^2(x/2)}\\
&= \frac{x}{2}\operatorname{cotan}\left(\frac{x}{2}\right)
\end{aligned}$$

Et de même :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Im}\big(f(x)\big) &= \mathrm{Im}\big(\frac{ix(e^{-ix-1})}{|e^{ix}-1|^2}\\
&= \frac{x(\cos x - 1)}{4\sin^2(x/2)}\\
&= -\frac{x}{2}
\end{aligned}$$

On prend la partie réelle du développement limité calculé à la partie précédente :

$$\frac{x}{2}\operatorname{cotan}\left(\frac{x}{2}\right) = \sum_{\substack{0\le k\le n\\ k \text{ pair}}} a_k (ix)^k + o(x^n) = \sum_{\ell=0}^{\lfloor \frac{n}{2}\rfloor} (-1)^\ell a_{2\ell} x^{2\ell} + o(x^n).$$

En substituant $2x$ à x :

$$x \operatorname{cotan} x = \sum_{\ell=0}^{\lfloor \frac{n}{2}\rfloor} (-1)^\ell a_{2\ell} 2^{2\ell} x^{2\ell} + o(x^n).$$

De plus, l'identité montre que $f(x) + i\dfrac{x}{2}$ est une fonction à valeurs réelles. Donc les a_k sont nuls pour $k \ge 3$.

7. Les termes sont bien définis si $x \not\equiv \pi/2[\pi]$, $x \not\equiv 0[\pi]$ et $2x \not\equiv 0[\pi]$. Cela revient à demander que $x \not\equiv 0[\pi/2]$. Soit un tel x. On calcule :

$$\begin{aligned}
\operatorname{cotan}(x) - 2\operatorname{cotan}(2x) &= \frac{\cos(x)}{\sin(x)} - 2\frac{\cos(2x)}{\sin(2x)}\\
&= \frac{\cos(x)}{\sin(x)} - \frac{\cos^2(x) - \sin^2(x)}{\cos(x)\sin(x)}\\
&= \frac{\cos^2(x) - (\cos^2(x) - \sin^2(x))}{\cos(x)\sin(x)}\\
&= \frac{\sin(x)}{\cos(x)}\\
&= \tan(x).
\end{aligned}$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a donc :

$$\begin{aligned}
x \tan x &= x \operatorname{cotan} x - (2x)\operatorname{cotan}(2x) \\
&= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_{2k} 2^{2k} x^{2k} - \sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_{2k} 4^{2k} x^{2k} + o(x^{2n}) \\
&= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_{2k} 2^{2k} (1-2^{2k}) x^{2k} + o(x^{2n}) \\
&= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} a_{2k} 2^{2k} (2^{2k}-1) x^{2k} + o(x^{2n})
\end{aligned}$$

En divisant par x, on obtient finalement :

$$\tan x = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} a_{2k} 2^{2k} (2^{2k}-1) x^{2k-1} + o(x^{2n-1}).$$

3 Formule d'Euler-Maclaurin et applications

3.1 Formule sommatoire d'Euler-Maclaurin

8. La fonction $t \mapsto \{t\}$ est 1-périodique, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\widetilde{A_n}$ aussi.

   Soit $n \neq 1$. Comme $t \mapsto \{t\}$ est continue en tous les points de $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$ et que A_n est continue, $\widetilde{A_n}$ est continue en tous les points de $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$. Soit $k \in \mathbb{Z}$. Par composition de limites, on a :

   $$\lim_{t \to k^-} \widetilde{A_n}(t) = \lim_{u \to 1^-} A_n(u) = A_n(1)$$

   et de même $\lim\limits_{t \to k^+} \widetilde{A_n}(t) = A_n(0)$. De plus, $\widetilde{A_n}(k) = A_n(0)$. Il suffit donc de montrer que $A_n(0) = A_n(1)$.

   Si $n = 0$, c'est évident. Si $n \geq 2$, cela vient de ce que $A_n(1) - A_n(0) = \int_0^1 A_{n-1}(t)dt = 0$, par construction.

9. On procède par récurrence finie. Pour tout $i \in [\![1, d]\!]$, on note $\mathscr{P}(i)$ l'identité à montrer, avec i à la place de d.

   Initialisation : pour $i = 1$, l'identité donne :

   $$\frac{f(p) + f(p+1)}{2} = \int_p^{p+1} f(t)dt + \int_p^{p+1} \widetilde{A_1}(t) f'(t)dt.$$

   Comme $A_1 = X - \frac{1}{2}$, on peut calculer l'intégrale de droite :

   $$\begin{aligned}
   \int_p^{p+1} \widetilde{A_1}(t) f'(t)dt &= \int_p^{p+1} (t - p - \frac{1}{2}) f'(t)dt \\
   &= [(t - p - \frac{1}{2}) f(t)]_{t=p}^{t=p+1} - \int_p^{p+1} f(t)dt \\
   &= \frac{f(p+1) + f(p)}{2} - \int_p^{p+1} f(t)dt.
   \end{aligned}$$

D'où l'identité souhaitée.

Hérédité : Soit $i \in [\![1, d-1]\!]$. On suppose $\mathscr{P}(i)$ vraie, donc :

$$\frac{f(p)+f(p+1)}{2} = \int_p^{p+1} f(t)dt + \sum_{k=2}^{i} a_k\big(f^{(k-1)}(p+1) - f^{(k-1)}(p)\big) + (-1)^{i+1}\int_p^{p+1} \widetilde{A_i}(t) f^{(i)}(t)dt.$$

On fait une intégration par parties sur l'intégrale de droite.

$$\begin{aligned}\int_p^{p+1} \widetilde{A_i}(t) f^{(i)}(t)dt &= [\widetilde{A_{i+1}}(t) f^{(i)}(t)]_{t=p}^{t=p+1} - \int_p^{p+1} \widetilde{A_{i+1}}(t) f^{(i+1)}(t)dt \\ &= a_{i+1}\big(f^i(p+1) - f^i(p)\big) - \int_p^{p+1} \widetilde{A_{i+1}}(t) f^{(i+1)}(t)dt\end{aligned}$$

On obtient la formule souhaitée avec un $(-1)^{i+1} a_{i+1}$ au lieu de a_{i+1} dans la somme. Mais comme $i+1 \geq 2$ et que les a_k pour $k \geq 3$ impair sont nuls, cela revient au même.

10. On somme la formule précédente pour $p \in [\![m, n-1]\!]$. Par téléscopage et relation de Chasles, on obtient :

$$\frac{1}{2}\sum_{p=m}^{n-1}\big(f(p)+f(p+1)\big) = \int_m^n f(t)dt + \sum_{k=2}^{d} a_k\big(f^{(k-1)}(m) - f^{(k-1)}(n)\big) + (-1)^{d+1}\int_m^n \widetilde{A_d}(t) f^{(d)}(t)dt.$$

Le membre de gauche vaut $\displaystyle\sum_{p=m}^{n} f(p) - \frac{f(m)+f(n)}{2}$. D'où la formule annoncée.

3.2 Formule de Faulhaber

11. On applique la formule d'Euler-Maclaurin à $f : x \mapsto x^d$ entre 0 et n (*plus agréable pour les calculs qu'entre* 1 *et n !*). On a :

$$\sum_{k=0}^{n} k^d = \int_0^n t^d dt + \frac{n^d}{2} + \sum_{k=2}^{d+1} a_k\big(f^{(k-1)}(n) - f^{(k-1)}(0)\big) + 0,$$

car $f^{(d+1)}$ est la fonction nulle.

Pour tout k, $f^{(k-1)} : x \mapsto d(d-1)\dots(d-k+2)x^{d+1-k} = (k-1)!\binom{d}{k-1}x^{d+1-k}$. Donc

$$\sum_{k=1}^{n} k^d = \frac{n^{d+1}}{d+1} + \frac{n^d}{2} + \sum_{k=2}^{d} \frac{b_k}{k}\binom{d}{k-1} n^{d+1-k}.$$

Le dernier terme de la somme disparait car $f^{(d)}$ est une constante.

Par la formule du chef, $\frac{1}{k}\binom{d}{k-1} = \frac{1}{d+1}\binom{d+1}{k}$. On en déduit la formule annoncée :

$$\sum_{k=1}^{n} k^d = \frac{1}{d+1}\Big(n^{d+1} + \frac{d+1}{2}n^d + \sum_{k=2}^{d} b_k\binom{d+1}{k} n^{d+1-k}\Big).$$

12. Les termes de la somme (finie) sont des $o(n^d)$. Donc,

$$S_n = \frac{n^{d+1}}{d+1} + \frac{n^d}{2} + o(n^d).$$

3.3 Développement asymptotique de la série harmonique

13. Comme $d \geq 2$, $\widetilde{A_d}$ est continue, en plus d'être 1-périodique. Par 1-périodicité, l'ensemble des valeurs prises par $\widetilde{A_d}$ est égal à l'ensemble de ses valeurs prises sur $[0,1]$. Par le théorème des bornes atteintes, cet ensemble est borné.

    On a $f^{(d)} : t \mapsto \dfrac{(-1)^d d!}{t^{d+1}}$. Donc, la fonction $t \mapsto t^{d+1}\widetilde{A_d}(t) f^{(d)}(t)$ est bornée au voisinage de $+\infty$ (en fait, partout), donc
    $$\widetilde{A_d}(t) f^{(d)}(t) = O(t^{-d-1}).$$

14. Soit $A > 0$ et $T > 0$ tel que pour tout $t \geq T$,
    $$|\widetilde{A_d}(t) f^{(d)}(t)| \leq A t^{-d-1}.$$
    Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$ tels que $x > n \geq T$. On note $I_n(x) = \displaystyle\int_n^x \widetilde{A_d}(t) f^{(d)}(t) dt$. Par inégalité triangulaire,
    $$|I_n(x)| \leq \int_n^x |\widetilde{A_d}(t) f^{(d)}(t)| dt \leq \int_n^x A t^{-d-1} dt \leq A\left(\frac{1}{n^d} - \frac{1}{x^d}\right).$$
    On passe à la limite $x \to +\infty$ et on obtient :
    $$|I_n| \leq \frac{A}{n^d}.$$
    Donc $I_n = O(n^{-d})$, quand n tend vers $+\infty$.

15. On applique la formule d'Euler-Maclaurin à $f : t \mapsto \dfrac{1}{t}$ entre 1 et n :
    $$H_n = \int_1^n \frac{1}{t} dt + \frac{1 + \frac{1}{n}}{2} + \sum_{k=2}^{d} a_k (-1)^{k-1} (k-1)! (\frac{1}{n^k} - 1) + (-1)^{d+1} \int_1^n \widetilde{A_d}(t) f^{(d)}(t) dt.$$
    Par relation de Chasles (étendue avec une borne à l'infini), on a
    $$\int_1^n \widetilde{A_d}(t) f^{(d)}(t) dt = \int_1^\infty \widetilde{A_d}(t) f^{(d)}(t) dt - \int_n^\infty \widetilde{A_d}(t) f^{(d)}(t) dt = \int_1^\infty \widetilde{A_d}(t) f^{(d)}(t) dt + O(n^{-d}).$$
    De plus, $a_k (k-1)! = \dfrac{b_k}{k}$. En regroupant toutes les constantes (i.e. les termes de la somme ne dépendant pas de n), on a donc :
    $$H_n = \ln n + \frac{1}{2n} + \sum_{k=2}^{d} \frac{(-1)^{k-1} b_k}{k} \frac{1}{n^k} + O(n^{-d}),$$
    où on a posé
    $$\gamma = \frac{1}{2} - \sum_{k=2}^{d} \frac{(-1)^{k-1} b_k}{k} + \int_1^\infty \widetilde{A_d}(t) f^{(d)}(t) dt.$$
    Il reste à remarquer qu'on peut enlever le dernier terme de la somme, car c'est un $O(n^{-d})$.