

DM 13A - Asymptotique - technique

1 Calculs – DS6 2022-2023

1. On note $g(x) = \left(\frac{x}{\sin x}\right)^{\frac{\sin x}{x-\sin x}}$. On a

$$g(x) = \exp\left(\frac{\sin x}{x - \sin x} \ln\left(\frac{x}{\sin x}\right)\right).$$

On calcule :

$$\frac{x}{\sin x} = \frac{x}{x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)} = \frac{1}{1 - \frac{x^2}{6} + o(x^2)} = 1 + \frac{x^2}{6} + o(x^2).$$

On en déduit que $\ln\left(\frac{x}{\sin x}\right) = \ln\left(1 + \frac{x^2}{6} + o(x^2)\right) = \frac{x^2}{6} + o(x^2)$. De plus,

$$\frac{\sin x}{x - \sin x} \sim \frac{x}{\frac{x^3}{6}} = \frac{6}{x^2}.$$

Donc, $\frac{\sin x}{x - \sin x} \ln\left(\frac{x}{\sin x}\right) \sim \frac{6}{x^2} \times \frac{x^2}{6} = 1$.

Par composition de limites, on en déduit que $\lim_{x \rightarrow 0} g = e$.

2. On commence par écrire le développement limité de $\sqrt{1+u}$ à la précision $o(u^3)$.

$$\sqrt{1+u} = 1 + \frac{1}{2}u - \frac{1}{8}u^2 + \frac{1}{16}u^3 + o(u^3).$$

On calcule :

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 \left(\sqrt{1 + \frac{2}{x}} - \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} \right) \\ &= x^2 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{2}{x} - \frac{1}{8} \frac{4}{x^2} + \frac{1}{16} \frac{8}{x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right) - \left(1 + \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^3}\right) \right) \right) \\ &= x - 1 + \frac{1}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \end{aligned}$$

On en déduit que la droite d'équation $y = x - 1$ est asymptote à la courbe représentative de f en $+\infty$. De plus, l'asymptote est en-dessous de cette courbe (au voisinage de $+\infty$).

2 Une suite implicite – exercice 15 du TD

1. La fonction $f : x \mapsto x + e^x$ est strictement croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et de limites $\pm\infty$ en $\pm\infty$. Comme elle est continue, elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$; en particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}$, n a un unique antécédent, qu'on note x_n .

2. La suite (x_n) est strictement croissante car pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n = f^{-1}(n)$ et que f^{-1} est strictement croissante (car bijection réciproque de f , qui est strictement croissante). Donc, par le théorème de la limite monotone, (x_n) admet une limite. Si celle-ci était finie, (x_n) serait majorée par un réel M . On aurait alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n = x_n + e^{x_n} \leq C + e^C$, ce qui est absurde. Donc, (x_n) tend vers $+\infty$.
Comme $\lim x_n = +\infty$, on a par croissance comparée $n = x_n + e^{x_n} \sim e^{x_n}$. Ainsi, $e^{x_n} = n + o(n)$. On passe au logarithme et on factorise par n :

$$x_n = \ln(n(1 + o(1))) = \ln n + \ln(1 + o(1)) = \ln n + o(1).$$

En particulier $x_n \sim \ln n$. (On est en fait plus précis, puisqu'on sait que le terme suivant dans un développement asymptotique de x_n tend en fait vers 0.)

3. On note $y_n = x_n - \ln n$. On substitue dans l'égalité $x_n + e^{x_n} = n$ définissant x_n :

$$\ln n + y_n + e^{\ln n + y_n} = n.$$

On obtient :

$$\ln n + y_n + ne^{y_n} = n.$$

Mais on a vu qu'en fait $y_n = x_n - \ln n = o(1)$. On peut donc développer e^{y_n} :

$$e^{y_n} = 1 + y_n + o(y_n).$$

Donc,

$$\ln n + y_n + ny_n + o(ny_n) = 0.$$

On peut absorber le terme y_n dans le $o(ny_n)$. Il vient ainsi :

$$ny_n + o(ny_n) = -\ln n.$$

D'où $y_n \sim -\frac{\ln n}{n}$. Et donc $x_n = \ln n - \frac{\ln n}{n} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right)$.

3 Fonction W de Lambert – DS6 2022-2023

1. f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ comme produit de fonctions $\mathcal{C}^\infty$. On a $f'(t) = (t+1)e^t \geq 0$, avec égalité seulement en -1 . Donc f est strictement croissante. De plus, $f(-1) = -e^{-1}$ et $\lim_{+\infty} f = +\infty$.
Par le théorème de la bijection, f réalise une bijection de $[-1, +\infty[$ sur $[-e^{-1}, +\infty[$.
2. Soit $x \geq -e^{-1}$. Par définition, on a $W(x)e^{W(x)} = x$. On passe au logarithme :

$$W(x) + \ln W(x) = \ln x.$$

Des variations de f , on déduit que $\lim_{+\infty} W = +\infty$. Donc, $\ln W(x) = o(W(x))$. Donc $W(x) \sim \ln x$ en $+\infty$.

Notons maintenant $y(x) = W(x) - \ln x$. On réécrit l'équation précédente :

$$y(x) + \ln x + \ln(\ln x + y(x)) = \ln x.$$

Et $y(x) = o(\ln x)$ en $+\infty$. Donc,

$$y(x) + \ln(\ln x) + \ln\left(1 + \frac{y(x)}{\ln x}\right) = 0.$$

Comme $\frac{y(x)}{\ln x}$ tend vers 0 en $+\infty$, on en déduit :

$$y(x) + \ln(\ln x) + O\left(\frac{y(x)}{\ln x}\right) = 0.$$

Le terme $O\left(\frac{y(x)}{\ln x}\right)$ est borné et $\ln(\ln x)$ tend vers $+\infty$. Donc, $y(x) \sim -\ln(\ln x)$. Et on peut réécrire plus précisément :

$$y(x) = -\ln(\ln x) + O\left(\frac{\ln(\ln x)}{\ln x}\right).$$

Finalement :

$$W(x) = \ln x - \ln(\ln x) + O\left(\frac{\ln(\ln x)}{\ln x}\right).$$

3. La dérivée de f ne s'annule qu'en -1 , d'image $-e^{-1}$ par f . Donc W est $\mathcal{C}^\infty$ sur $] -e^{-1}, +\infty[$. En particulier, elle admet un développement limité à tout ordre en 0. On a $f(0) = 0$, donc $W(0) = 0$. On peut donc écrire $W(x) = ax + bx^2 + cx^3 + o(x^3)$, où a, b, c sont à déterminer.

Pour $x \geq -e^{-1}$, on a l'égalité $W(x)e^{W(x)} = x$. Donc,

$$(ax + bx^2 + cx^3 + o(x^3)) \exp(ax + bx^2 + o(x^2)) = x.$$

On développe :

$$x(a + bx + cx^2 + o(x^2))(1 + (ax + bx^2) + \frac{1}{2}(ax + bx^2)^2 + o(x^2)) = x.$$

$$x(a + (a^2 + b)x + (c + 2ab + \frac{a^2}{2})x^2 + o(x^2)) = x.$$

On en déduit que $a = 1$, $a^2 + b = 0$ et $c + 2ab + \frac{a^2}{2} = 0$. Donc $a = 1$, $b = -1$ et $c = \frac{3}{2}$. Donc,

$$W(x) = x - x^2 + \frac{3}{2}x^3 + o(x^3).$$