

DM 14 - Méthode de Newton – Étude d'une suite récurrente

1 Étude d'une suite récurrente

Étudier soigneusement la suite (u_n) définie par récurrence par $u_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 1 + \frac{2}{u_n}$.

2 Méthode de Newton

On décrit la méthode de Newton, qui donne une approximation rapide d'un zéro d'une fonction. Dans tout le problème, I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et f est une application dans $\mathcal{C}^2(I, \mathbb{R})$.

2.1 Préliminaires

1. Soit x^* un point intérieur à I tel que $f'(x^*) \neq 0$. Montrer qu'il existe $h > 0$ et deux constantes $m_1 > 0$ et $M_2 \geq 0$ telles que $[x^* - h, x^* + h] \subset I$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, |x - x^*| \leq h \implies |f'(x)| \geq m_1 \text{ et } |f''(x)| \leq M_2.$$

2. **Identité de Taylor-Lagrange à l'ordre 2.** Soient $a \neq b$ dans I .

- (a) Montrer qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que $P(a) = f(a)$, $P'(a) = f'(a)$ et $P(b) = f(b)$.
- (b) Montrer qu'il existe c compris entre a et b tel que $f''(c) = P''(c)$.
- (c) En déduire l'identité suivante :

$$f(b) = f(a) + (b - a)f'(a) + \frac{(b - a)^2}{2}f''(c).$$

3. Soit $C > 0$. Soit $(u_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \leq Cu_n^2$. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq C^{-1}(Cu_0)^{2^n}.$$

2.2 Méthode de Newton

Soit $x^* \in I$ tel que $f(x^*) = 0$. On suppose que $f'(x^*) \neq 0$ et – pour simplifier – que x^* n'est pas une borne de I . Étant donné $x_0 \in I$, la méthode de Newton consiste à étudier la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie récursivement par la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N} : x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \text{ si } x_n \text{ est dans } I \text{ et si } f'(x_n) \neq 0.$$

Si x_n est défini pour tout $n \in \mathbb{N}$ et si la suite (x_n) converge vers x^* , on dit que la méthode de Newton de donnée initiale x_0 converge vers x^* .

4. Interpréter géométriquement, en fonction de la courbe représentative de f et de ses tangentes, la relation entre les points x_n et x_{n+1} , pour $n \in \mathbb{N}$. Illustrer la méthode de Newton.

On note $I_0 = \{x \in I \mid f'(x) \neq 0\}$ et on définit N_f de I_0 dans $\mathbb{R}$ par :

$$N_f(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

5. Soit x dans I_0 . En utilisant l'identité de Taylor-Lagrange à l'ordre 2, montrer qu'il existe ξ compris entre x et x^* tel que

$$N_f(x) - x^* = \frac{(x - x^*)^2}{2f'(x)} f''(\xi).$$

6. Soient h, m_1 et M_2 comme dans la question 1. Montrer que si x vérifie $|x - x^*| \leq h$, alors x est dans I_0 et

$$|N_f(x) - x^*| \leq |x - x^*|^2 \frac{M_2}{2m_1}.$$

7. On pose $C = \frac{M_2}{2m_1}$ et $h' = \min(h, C^{-1})$. Montrer que si $|x_0 - x^*| \leq h'$, alors la suite (x_n) donnée par la méthode de Newton est bien définie et vérifie l'estimée :

$$\forall n \in \mathbb{N} : |x_n - x^*| \leq C^{-1} \left(C |x_0 - x^*| \right)^{2^n}.$$

8. En déduire que la méthode de Newton de donnée initiale x_0 converge vers x^* , si x_0 est suffisamment proche de x^* .

2.3 Application : la méthode de Héron

Soit a un réel strictement positif. On considère la fonction $f : x \mapsto x^2 - a$, définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

9. Soit $x_0 > 0$. Expliciter la relation de récurrence définissant (x_n) dans la méthode de Newton pour la fonction f .
10. Estimer à partir de quel rang cette méthode donne une précision de $\sqrt{2}$ à 100 chiffres après la virgule.