Suites récurrentes

1 Généralités

EXERCICE 1. ●○○ *Étude générale*
Étudier la convergence des suites récurrentes suivantes :

1. $u_{n+1} = \dfrac{2+u_n^2}{3}$
2. $u_{n+1} = e^{-u_n}$
3. $u_{n+1} = \sin u_n$
4. $u_{n+1} = (1-u_n)^2$, où $u_0 \in [0,1]$
5. $u_{n+1} = \sqrt{2-u_n}$ ($u_0 \in [0,2]$)
6. $u_{n+1} = \dfrac{3}{2+u_n^2}$
7. $u_{n+1} = \ln(1+2u_n)$, où $u_0 > 1$
8. $u_{n+1} = \sqrt{u_n^2+u_n}$ ($u_0 > 0$)

EXERCICE 2. ♣ – ●◐○ *Produit de racines itérées*
Soit $u_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{\dfrac{u_n+1}{2}}$. Étudier la suite de terme général $v_n = \prod_{k=1}^{n} u_k$.

EXERCICE 3. ♣ – ●●○ *Suite logistique, cas limite*
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 4u_n(1-u_n)$.

1. Montrer que si $u_0 \notin [0,1]$, alors $u_n \to -\infty$.
2. On suppose que $u_0 \in [0,1]$ et on considère $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $u_0 = \sin^2\theta$. Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n sous la forme $\sin\theta_n$. En déduire l'ensemble des valeurs u_0 pour lesquelles (u_n) converge.
3. Montrer que l'ensemble des valeurs de u_0 pour lesquelles (u_n) est périodique est dense dans $[0,1]$.

EXERCICE 4. ♣/♢ – ●●○ *Moyenne de Cesàro d'une suite récurrente*
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue, soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$. On suppose que la suite de terme général

$$v_n = \frac{u_0 + \cdots + u_n}{n+1}$$

est bornée. Montrer que f admet un point fixe.

2 Asymptotique

EXERCICE 5. ♣ – ●●○ *Différentes méthodes pour l'obtention d'un équivalent*
On considère une suite $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n - 3u_n^2$.

1. Montrer que, si $u_0 \in \left]0, \frac{1}{3}\right[$, alors u est à valeurs strictement positives et tend vers 0.

On suppose dans la suite de l'exercice que $u_0 \in \left]0, \frac{1}{3}\right[$.

2. **Équivalent conjectural**.
   (a) Pour tous $\lambda, \alpha \in \mathbb{R}$, on note $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*} = \left(\lambda\, n^{\alpha}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
   Donner un équivalent de $(v_{n+1} - v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et de $\left(-3v_n^2\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
   (b) Résoudre (à la physicienne) l'équation différentielle $y' + 3y^2 = 0$.
   (c) Utiliser l'une ou l'autre des questions précédentes pour conjecturer un équivalent de (u_n).
3. **Équivalent, par comparaison à une intégrale.**
   (a) Montrer que $\displaystyle\int_{u_{n+1}}^{u_n} \frac{dt}{t^2}$ converge vers 3 quand $n \to +\infty$.
   (b) En utilisant le théorème de Cesàro, donner un équivalent de $\displaystyle\left(\int_{u_n}^{u_0} \frac{dt}{t^2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et en déduire un équivalent de (u_n).
4. **Développement asymptotique, *via* une suite auxiliaire.**
   On définit $(w_n)_{n\in\mathbb{N}} = \displaystyle\left(\frac{1}{3u_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (a) Montrer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}(w_{n+1} - w_n) = 1$ et en déduire à nouveau un équivalent de u.
   (b) Montrer $\left(w_{n+1} - (n+1)\right) - \left(w_n - n\right) \sim \dfrac{1}{n}$.

   Les deux questions suivantes demandent davantage de connaissances.

   (c) Montrer que $w_n - n \sim \ln n$.
   (d) En déduire un développement asymptotique à deux termes de (u_n).

EXERCICE 6. ●●◐ *Équivalent de* $u_{n+1} = \sin(u_n)$
Soient $c > 0$ et $f : [0, c] \to [0, c]$ une fonction continue admettant en 0 un développement asymptotique de la forme
$$f(x) = x - ax^{\alpha} + o(x^{\alpha}),$$
où $a > 0$ et $\alpha > 1$.

1. Montrer que si u_0 est assez petit, la suite (u_n) définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers 0.

On suppose cette condition satisfaite dans la suite.

2. Déterminer $\beta \in \mathbb{R}^*$ tel que la suite $(u_{n+1}^{\beta} - u_n^{\beta})$ ait une limite finie non nulle.
3. En déduire un équivalent de (u_n).
4. Appliquer à une suite récurrente $u_{n+1} = \sin(u_n)$.

EXERCICE 7. ●●◐ *Équivalents de suites récurrentes*
Donner la limite et un équivalent des suites suivantes, définies par récurrence :

1. $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{u_n}$ $(u_0 > 0)$
2. $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1+u_n^2}$ $(u_0 > 0)$
3. $u_{n+1} = u_n e^{-u_n}$ $(u_0 > 0)$
4. $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{\ln u_n}$ $(u_0 > 1)$

EXERCICE 8. ♣ – ●●◐ $u_{n+1} = \sqrt{u_n + n^2}$
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{u_n + n^2}$.

1. Montrer que $u_n = n + O(1)$.
2. En déduire que $u_{n+1} = n + \dfrac{1}{2} + o(1)$ et donner un développement asymptotique de u à la précision $o(1)$.
3. Obtenir un développement asymptotique de u à la précision $o\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

EXERCICE 9. ♣ – ●●● *Développement asymptotique d'une suite récurrente*
Donner un développement asymptotique à deux termes d'une suite définie par récurrence par $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + e^{-u_n}$.

Indications

Exercice 4. Si f n'a pas de point fixe, quelle propriété a la suite (u_n) ?