

17 - Analyse asymptotique

Jeremy Daniel

1 Relations de comparaison

I est un intervalle de $\mathbb{R}$, a est un point adhérent à I , $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1.1 Généralités

DÉFINITION 1.1 (Relations de comparaison pour les fonctions)

Soient $f, g : I \rightarrow \mathbb{K}$. On dit que

- f est dominée par g au voisinage de a s'il existe $u : I \rightarrow \mathbb{K}$, bornée au voisinage de a telle que $f = g \times u$ au voisinage de a .
- f est négligeable devant g au voisinage de a s'il existe $\varepsilon : I \rightarrow \mathbb{K}$, de limite nulle en a telle que $f = g \times \varepsilon$ au voisinage de a .
- f est équivalente à g au voisinage de a s'il existe $u : I \rightarrow \mathbb{K}$ de limite 1 en a telle que $f = g \times u$ au voisinage de a .

NOTATION 1.2

On écrit respectivement $f = O(g)$, $f = o(g)$ et $f \sim (g)$. Quand le contexte est clair, on pourra sous-entendre le point où la comparaison est faite, ou bien l'écrire à côté : $f = O(g)$ en a /au voisinage de a .

REMARQUE 1.3

Pour les notations o et O , seule la valeur absolue (ou le module) des fonctions a une importance : $f = O(g) \iff |f| = O(|g|)$ et $f = o(g) \iff |f| = o(|g|)$.

PROPOSITION 1.4

On suppose que g ne s'annule pas au voisinage de a . Alors :

- $f = O(g)$ en a ssi $\frac{f}{g}$ est bornée au voisinage de a .
- $f = o(g)$ en a ssi $\frac{f}{g}$ tend vers 0 en a .
- $f \sim g$ en a ssi $\frac{f}{g}$ tend vers 1 en a .

REMARQUE 1.5

On suppose que g est définie en a , que $g(a) = 0$ mais que g ne s'annule pas ailleurs qu'en a , sur un voisinage de a . Alors $\frac{f}{g}$ est bien définie sur un voisinage épointé de a (voisinage privé de a). Alors, en ajoutant la condition $f(a) = 0$ (nécessaire), les équivalences précédentes restent vraies.

ATTENTION !

La plupart des fonctions considérées vérifient cette condition. Des contre-exemples sont donnés par $\cos$ en $+\infty$ ou $x \mapsto x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ en 0 .

PROPOSITION 1.6 (Cas particulier des constantes)

On a les équivalences suivantes (où $\ell \in \mathbb{R}^*$) :

- $f = O(1)$ ssi f est bornée au voisinage de a ;
- $f = o(1)$ ssi f tend vers 0 en a ;
- $f \sim \ell$ ssi $\lim_a f = \ell$.

ATTENTION !

L'équivalence $f \sim 0$ en a signifie que f est identiquement nulle sur un voisinage de a . Cela n'arrivera jamais en pratique !

PROPOSITION 1.7 (Équivalents et limites)

Si $f \sim g$ en a et si $\lim_a f = \ell \in \mathbb{R}$, alors $\lim_a g = \ell$.

PROPOSITION 1.8 (Substitution fonction/fonction)

Soit $h : I \rightarrow J$ telle que $\lim_a h = b$ existe.

- Si $f = O(g)$ en b , alors $f \circ h = O(g \circ h)$ en a ;
- Si $f = o(g)$ en b , alors $f \circ h = o(g \circ h)$ en a ;
- Si $f \sim g$ en b , alors $f \circ h \sim g \circ h$ en a .

PROPOSITION 1.9 (Substitution fonction/suite)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans I , de limite a .

- Si $f = O(g)$ en a , alors $f(u_n) = O(g(u_n))$ en $+\infty$;
- Si $f = o(g)$ en a , alors $f(u_n) = o(g(u_n))$ en $+\infty$;
- Si $f \sim g$ en a , alors $f(u_n) \sim g(u_n)$ en $+\infty$.

PROPOSITION 1.10 (Croissances comparées)

Soit $a > 0$, soit $b > 0$.

- En $+\infty$: $(\ln x)^b = o(x^a)$ et $x^b = o(e^{ax})$.
- En 0 : $|\ln x|^b = o(x^{-a})$.
- En $-\infty$: $e^{ax} = o(|x|^{-b})$.

ATTENTION !

Si $0 \leq a_1 < a_2$, alors $x^{a_1} = o(x^{a_2})$ en $+\infty$ mais $x^{a_2} = o(x^{a_1})$ en 0.

PROPOSITION 1.11 (Règles de calcul o et O)

On a les règles de calcul suivantes :

- $f = o(g) \implies f = O(g)$;
- $f_1 = O(g_1), f_2 = O(g_2) \implies f_1 f_2 = O(g_1 g_2)$;
- $f_1 = O(g_1), f_2 = o(g_2) \implies f_1 f_2 = o(g_1 g_2)$;
- $f_1 = O(g), f_2 = O(g) \implies f_1 + f_2 = O(g)$;
- $f_1 = o(g), f_2 = o(g) \implies f_1 + f_2 = o(g)$;
- $f = O(g), g = O(h) \implies f = O(h)$;
- $f = O(g), g = o(h) \implies f = o(h)$;
- $f = o(g), g = O(h) \implies f = o(h)$.

REMARQUE 1.12

Comme $f_1 = O(f_1)$, on a en particulier $f_2 = O(g_2) \implies f_1 f_2 = O(f_1 g_2)$ et $f_2 = o(g_2) \implies f_1 f_2 = o(f_1 g_2)$. Dans un produit, on peut donc faire entrer les fonctions dans un o/O .

REMARQUE 1.13

Toutes ces propriétés sont vraies aussi avec les suites.

PROPOSITION 1.14 (Équivalents et o)

Au voisinage de a , $f \sim g \iff f = g + o(g)$.

1.2 Équivalents - la théorie

ATTENTION !

Soit f une fonction définie au voisinage de 0. Les assertions $f(x) \sim 1 + x$ et $f(x) - 1 \sim x$ (en 0) ne sont pas équivalentes :

- $f(x) \sim 1 + x$ en 0 signifie que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{1+x} = 1$. C'est équivalent à demander que $\lim_0 f = 1$, c'est-à-dire $f(x) \sim 1$ en 0.
- $f(x) - 1 \sim x$ en 0 signifie que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 1}{x} = 1$. Cela signifie (si f est définie en 0) que $f(0) = 1$ et que f est dérivable en 0, de dérivée $f'(0) = 1$.

THÉORÈME 1.15 (Développement limité à l'ordre 1)

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ dérivable en $a \in I$. Alors, en a :

$$f(x) = f(a) + (x - a)f'(a) + o(x - a).$$

Si de plus $f'(a) \neq 0$, on a $f(x) - f(a) \sim f'(a)(x - a)$ en a .

PROPOSITION 1.16 (Équivalents usuels en 0)

On a les équivalents suivants en 0 (où $\alpha \in \mathbb{R}^*$)

- | | | |
|---------------------|------------------------------------|------------------------------------|
| - $e^x - 1 \sim x$ | - $\tan x \sim x$ | - $\operatorname{Arctan} x \sim x$ |
| - $\ln(1+x) \sim x$ | - $(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$ | - $\operatorname{sh} x \sim x$ |
| - $\sin x \sim x$ | - $\operatorname{Arcsin} x \sim x$ | - $\operatorname{th} x \sim x$ |

EXEMPLE 1.17

La plupart du temps, on applique la proposition en 0. Mais on a par exemple :

$$\cos x - \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \sim -\frac{\sqrt{2}}{2}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

au voisinage de $\pi/4$.

PROPOSITION 1.18 (Propriétés conservées par équivalence)

Soient f et g , équivalentes en a .

- Si f est positive (resp. strictement positive) au voisinage de a , alors g aussi.
- Si f ne s'annule pas au voisinage de a (resp. sauf en a), alors g non plus (resp. sauf en a).

ATTENTION !

La monotonie des fonctions n'est pas conservée. Par exemple, si $f(x) = x$ et $g(x) = x + 2\sin x$, $f \sim g$ en $+\infty$, f est croissante (au voisinage de $+\infty$), mais pas g .

1.3 Équivalents - la pratique

1.3.1 Produit, quotient, puissance

PROPOSITION 1.19

Soient f_1, f_2, g_1 et g_2 définies sur I , soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors, au voisinage de a :

- Si $f_1 \sim g_1$ et $f_2 \sim g_2$, alors $f_1 f_2 \sim g_1 g_2$;
- Si $f_1 \sim g_1$ et $f_2 \sim g_2$, alors $\frac{f_1}{g_1} \sim \frac{f_2}{g_2}$ (si les g_i ne s'annulent pas au voisinage de a)
- Si $f_1 \sim g_1$, alors $f_1^\alpha \sim g_1^\alpha$ (si $f_1, g_1 \geq 0$).

EXERCICE 1.20

Équivalents en 0 de $\cos x - 1$ et de $\frac{\sin x}{(\cos x - 1) \ln(1+x)^2}$.

1.3.2 Composition

ATTENTION !

En général, $f \sim g$ en a n'implique pas $\phi(f) \sim \phi(g)$ en a . Considérer par exemple $x \sim x+1$ en $+\infty$ et $\exp$; ou bien $1+x \sim 1$ en 0 et $\ln$.

PROPOSITION 1.21 (Cas de l'exponentielle)

$e^f \sim e^g$ en a ssi $\lim_a (f - g) = 0$.

PROPOSITION 1.22 (Cas du logarithme)

Soient $f, g \geq 0$ au voisinage de a . Si $f \sim g$, et si f (et donc g) tend vers 0^+ ou $+\infty$ en a , alors $\ln f \sim \ln g$ en a .

1.3.3 Somme

ATTENTION !

On ne peut pas en général sommer les équivalents. Ainsi, $x \sim x - x^2$ en 0 mais $(x - x^2) - x = -x^2$ n'est pas équivalent à $(x - x) = 0$. Mieux vaut réécrire les équivalents avec des petits o quand on doit faire une somme.

EXERCICE 1.23

Équivalent de $\ln(1 + x) + \sin x$ en 0. Puis de $e^x - 1 - \sin x$.

1.3.4 Substitution**EXERCICE 1.24**

Équivalent en 0 de $\sin(e^x - 1)$.

2 Développements limités

I intervalle de $\mathbb{R}$, a adhérent à I .

2.1 Généralités**DÉFINITION 2.1** (Développement limité en a)

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{K}$, soit $n \in \mathbb{N}$. On dit que f admet un développement limité à l'ordre n en a s'il existe $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ tels que

$$f(x) = \sum_{k=0}^n a_k (x - a)^k + o((x - a)^n).$$

REMARQUE 2.2

f admet un développement limité à l'ordre n en a ssi $g : x \mapsto f(a + x)$, définie sur $J = I - a = \{x \in \mathbb{R} \mid a + x \in I\}$ admet un développement limité à l'ordre n en 0. En pratique, on peut toujours se ramener à des développements limités en 0, ce qu'on fait dans la suite.

PROPOSITION 2.3 (Unicité du développement limité)

Si f admet en 0 deux développements limités à l'ordre n :

$$f(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k + o(x^n) \text{ et } f(x) = \sum_{k=0}^n b_k x^k + o(x^n),$$

alors $(a_0, \dots, a_n) = (b_0, \dots, b_n)$.

DÉFINITION 2.4 (Partie régulière)

Avec les notations précédentes, on appelle partie régulière du développement limité à l'ordre n en 0 de f la fonction polynomiale $x \mapsto \sum_{k=0}^n a_k x^k$.

COROLLAIRE 2.5 (DL et parité)

On suppose que f admet un développement limité à l'ordre n en 0 , de partie régulière $x \mapsto \sum_{k=0}^n a_k x^k$.

- Si f est paire, les a_k sont nuls pour k impair.
- Si f est impaire, les a_k sont nuls pour k pair.

PROPOSITION 2.6 (DL à un ordre inférieur)

On suppose que f admet un développement limité à l'ordre n de partie régulière $x \mapsto \sum_{k=0}^n a_k x^k$. Alors, pour tout $i \leq n$, f admet un développement limité à l'ordre i en 0 , de

partie régulière $x \mapsto \sum_{k=0}^i a_k x^k$.

PROPOSITION 2.7 (Parties réelle et imaginaire d'un DL)

On suppose que f est à valeurs complexes. Elle admet un développement limité à l'ordre n ssi $\operatorname{Re} f$ et $\operatorname{Im} f$ ont un développement limité à l'ordre n . Dans ce cas, si $f(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k + o(x^n)$, les développements limités de $\operatorname{Re} f$ et $\operatorname{Im} f$ sont donnés par :

$$(\operatorname{Re} f)(x) = \sum_{k=0}^n (\operatorname{Re} a_k) x^k + o(x^n) \text{ et } (\operatorname{Im} f)(x) = \sum_{k=0}^n (\operatorname{Im} a_k) x^k + o(x^n).$$

2.2 Développements limités et dérivation

PROPOSITION 2.8 (DL à l'ordre 0)

f admet un développement limité à l'ordre 0 en 0 ssi f admet une limite finie en 0 . Dans ce cas, $a_0 = \lim_0 f$.

REMARQUE 2.9

Selon que f est définie ou non en 0 , cela revient à dire que f est continue en 0 ou qu'elle admet un prolongement par continuité en 0 .

PROPOSITION 2.10 (DL à l'ordre 1)

f admet un développement limité à l'ordre 1 en 0, de partie régulière $x \mapsto a_0 + a_1x$ ssi (le prolongement continu de) f est dérivable en 0, avec $f(0) = a_0$ et $f'(0) = a_1$.

ATTENTION !

On arrête là les équivalences. Considérons $f_k : x \mapsto x^k \sin\left(\frac{1}{x^k}\right)$, pour $k \geq 3$. Alors $f_k(x) = o(x^{k-1})$ donc f admet un DL en 0 à l'ordre $k - 1$. Mais la dérivée de f n'est pas continue en 0 ; en particulier $f \notin \mathcal{D}^{k-1}$.

REMARQUE 2.11

L'exemple précédent montre aussi que si f admet un développement limité à l'ordre n en 0, il n'est pas vrai en général que f' admet un développement limité à l'ordre $n - 1$ en 0. On a cependant la réciproque.

THÉORÈME 2.12 (Primitivation des DL)

On suppose que $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ est dérivable sur I et que sa dérivée f' admet un développement limité à l'ordre n en 0 : $f'(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k + o(x^n)$. Alors, f admet un développement limité à l'ordre $n + 1$ en 0, donné par :

$$f(x) = f(0) + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{a_{k-1}}{k} x^k + o(x^{n+1}).$$

EXERCICE 2.13

Déterminer le développement limité à l'ordre 5 de $\tan$ en 0.

2.3 Formule de Taylor-Young

THÉORÈME 2.14 (Formule de Taylor-Young)

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{K}$. On suppose que f est $n - 1$ fois dérivable et que $f^{(n-1)}$ est dérivable en 0. Alors, f admet un développement limité à l'ordre n en 0 :

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^n).$$

REMARQUE 2.15

Dans le programme, on suppose f de classe $\mathcal{C}^n$.

REMARQUE 2.16

En $a \neq 0$, la formule de Taylor-Young est

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k + o((x - a)^n).$$

PROPOSITION 2.17 (DL usuels)

Soit $n \in \mathbb{N}$, soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On a les développements limités suivants en 0 :

$$\begin{aligned}
- \exp(x) &= \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + o(x^n); \\
- \ln(1+x) &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} + o(x^n); \\
- \cos(x) &= \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1}); \\
- \sin(x) &= \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2}); \\
- \tan x &= x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^4); \\
- \operatorname{ch}(x) &= \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1}); \\
- \operatorname{sh}(x) &= \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2}); \\
- \frac{1}{1-x} &= \sum_{k=0}^n x^k + o(x^n); \\
- (1+x)^\alpha &= \sum_{k=0}^n \binom{\alpha}{k} x^k + o(x^n), \text{ où } \binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!}; \\
- \operatorname{Arctan} x &= \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2n+2}).
\end{aligned}$$

REMARQUE 2.18

Comme on connaît l'ordre de grandeur du premier terme négligé, on peut être légèrement plus précis en remplaçant le o par un O . Par exemple, $\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + O(x^5)$ est plus précis que $\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^4)$.

EXERCICE 2.19

Déterminer le développement limité à l'ordre n en 0 de Arcsin .

2.4 Pratique**2.4.1 DL d'une somme****EXERCICE 2.20**

DL à l'ordre 3 en 0 de $e^x - \tan x + \cos x$.

2.4.2 DL d'un produit

DÉFINITION 2.21 (Forme normalisée d'un DL)

Soit f admettant un DL à l'ordre n de partie régulière $x \mapsto \sum_{k=0}^n a_k x^k$ non nulle. On note $p = \min\{k \in \llbracket 0, n \rrbracket \mid a_k \neq 0\}$. La forme normalisée du DL à l'ordre n de f est :

$$f(x) = x^p \left(\sum_{k=p}^n a_k x^{k-p} + o(x^{n-p}) \right).$$

MÉTHODE 2.22

Supposons qu'on souhaite le DL à l'ordre n d'un produit fg . Si les formes normalisées des DL de f et g commencent respectivement à x^p et x^q , alors les DL de f et g à l'ordre $n - q$ et $n - p$ respectivement suffisent pour le calcul.

EXERCICE 2.23

DL à l'ordre 4 en 0 de $\tan x \times \ln(1 + x)$.

EXERCICE 2.24

DL à l'ordre 5 en 0 de $(\cos x - 1)(\sin x - x)$.

2.4.3 DL d'un quotient

MÉTHODE 2.25

On se donne un quotient $\frac{f}{g}$ dont on cherche le développement limité à l'ordre n en 0. On suppose que $g(0)$ est non nul. Démarche :

- On se ramène à un dénominateur tendant vers 1 (en factorisant par une constante) et on écrit ce dénominateur sous la forme $1 - u$ (donc avec $\lim_{u \rightarrow 0} u = 0$).
- On calcule le DL de $\frac{1}{1 - u}$ par substitution dans le DL de $\frac{1}{1 - x}$.
- On est ramené au DL d'un produit.

EXERCICE 2.26

DL à l'ordre 5 en 0 de $\tan = \frac{\sin}{\cos}$.

EXERCICE 2.27

DL à l'ordre 3 en 0 de $\frac{1}{1 + e^x}$.

MÉTHODE 2.28

Si $g(0) = 0$, on n'aura pas de DL en général (penser à $\frac{1}{x}$). Plus précisément si $f(x) \sim a_p x^p$ et $g(x) \sim b_q x^q$, alors $\frac{f(x)}{g(x)} \sim \frac{a_p}{b_q} x^{p-q}$ et on aura un DL ssi $p \geq q$. Cependant, même dans le

cas où $p < q$, on peut multiplier $\frac{f}{g}$ par x^{q-p} , obtenir un DL pour cette fonction et diviser à la fin par x^{q-p} . On obtient un développement asymptotique de $\frac{f}{g}$ en 0 (dans ce cas, comme un développement limité, mais en commençant avec des puissances négatives de x).

EXERCICE 2.29

Étude en 0 de $f(x) = \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x^3 - 1 + \cos x}$.

2.4.4 DL d'une composée

MÉTHODE 2.30

On cherche le DL d'une composition $g \circ f$ en 0. On suppose que $f(0) = 0$. Alors le DL s'obtient par substitution.

EXERCICE 2.31

DL à l'ordre 3 en 0 de $\ln(1 + \sin x)$.

MÉTHODE 2.32

Si $f(0)$ n'est pas égal à 0, on a deux possibilités : ou bien travailler l'expression pour se ramener à des DL en 0, ou bien utiliser le DL de g ailleurs qu'en 0.

EXERCICE 2.33

DL à l'ordre 3 en 0 de $\frac{1}{2+x}$, puis de $\ln(1 + e^x)$.

REMARQUE 2.34

Les développements limités de $\exp$ et $\ln$ s'obtiennent rapidement à partir de ceux de référence.

– Soit $a \in \mathbb{R}$. Alors, au voisinage de a :

$$\exp(x) = \exp(a) \exp(x - a) = \exp(a) \sum_{k=0}^n \frac{(x - a)^k}{k!} + o((x - a)^n).$$

– Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Alors au voisinage de a :

$$\ln(x) = \ln(a) + \ln\left(1 + \left(\frac{x - a}{a}\right)\right) = \ln a + \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \frac{(x - a)^k}{a^k k} + o((x - a)^n).$$

3 Applications

3.1 Calculs de limites

EXERCICE 3.1

Déterminer les limites suivantes :

$$- \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\ln(1 + x^2)}; \quad - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin x - x \cos x - 2x}{\sin^5 x}; \quad - \lim_n e^{-\sqrt{n}} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n.$$

3.2 Tangentes et asymptotes

3.2.1 Position relative d'une tangente

MÉTHODE 3.2

Supposons qu'au voisinage de a ,

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + a_{k_0}(x - a)^{k_0} + o((x - a)^{k_0}),$$

avec $a_{k_0} \neq 0$. Alors, la parité de k_0 et le signe de a_{k_0} permettent de déterminer le signe (au voisinage de a) de $f(x) - f(a) - f'(a)(x - a)$, c'est-à-dire la position relative de la courbe représentative de f et de sa tangente en a . On a en effet : $f(x) - f(a) - f'(a)(x - a) \sim a_{k_0}(x - a)^{k_0}$. Donc :

- Si k_0 est pair, la courbe est au-dessus de sa tangente si $a_{k_0} > 0$, en dessous si $a_{k_0} < 0$.
- Si k_0 est impair, la tangente traverse la courbe (on dit que a est un point d'inflexion) ; elle est en dessous puis au-dessus si $a_{k_0} > 0$, au-dessus puis en dessous si $a_{k_0} < 0$.

REMARQUE 3.3

Dans le cas particulier où a est un point critique de f , cela revient à étudier si a est un extremum local et, le cas échéant, si c'est un minimum ou maximum local.

EXERCICE 3.4

Étude de $f(x) = e^x + \ln(1 + x)$ en 0.

3.2.2 Étude des asymptotes

DÉFINITION 3.5 (DL en $+\infty$)

Soit f une fonction définie au voisinage de $+\infty$. On dit que f admet un développement limité à l'ordre n en $+\infty$ si la fonction $x \mapsto f\left(\frac{1}{x}\right)$ admet un développement limité à l'ordre n en 0^+ .

REMARQUE 3.6

On a alors $f(x) = a_0 + a_1 \frac{1}{x} + \cdots + a_n \frac{1}{x^n} + o\left(\frac{1}{x^n}\right)$, en $+\infty$.

MÉTHODE 3.7

On dit que la droite affine $x \mapsto ax + b$ est asymptote oblique à f en $+\infty$ si

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0.$$

Si la fonction $x \mapsto f(x) - (ax + b)$ admet un développement limité en $+\infty$, on peut déterminer la position relative de la courbe représentative de f et de son asymptote (qui dépendra uniquement du signe du premier coefficient non nul du DL).

EXERCICE 3.8

Étude en $+\infty$ de $f(x) = \sqrt{\frac{x^3}{x-1}}$.

3.3 Série harmonique et formule de Stirling

REMARQUE 3.9 (Développement asymptotique)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite. Si on peut écrire

$$u_n = \sum_{k=1}^N a_k v_{k,n} + o(v_N),$$

où les $(v_{k,n})_{n \in \mathbb{N}}$ sont des *suites de référence* telles que $v_{k+1,n} = o(v_{k,n})$ et les a_k des constantes, on dit qu'on a écrit un développement asymptotique de (u_n) à N termes.

Chaque terme de la somme affine la connaissance du comportement asymptotique de (u_n) .

THÉORÈME 3.10 (Série harmonique)

Pour tout $n \geq 1$, on note $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$. Il existe une constante γ^1 telle que

$$H_n = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

THÉORÈME 3.11 (Formule de Stirling)

On a l'équivalent suivant :

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

1. Constante d'Euler-Mascheroni, $\gamma \cong 0,577$