

## 22 - Séries numériques

Jeremy Daniel

### 1 Convergence d'une série de nombres

DÉFINITION 1.1 (Série de nombres)

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite à valeurs réelles ou complexe. La série de terme général  $u_n$  – notée

$\sum u_n$  ou  $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$  – est la suite de terme général  $S_p = \sum_{n=0}^p u_n$ .

REMARQUE 1.2

Si la suite  $(u_n)$  est définie à partir de l'indice  $n_0$ , alors on note plutôt  $\sum_{n \geq n_0} u_n$  la série

correspondante, définie par  $S_p = \sum_{n=n_0}^p u_n$ , pour  $n \geq n_0$ .

REMARQUE 1.3

Une série  $\sum u_n$  est une suite, mais on cherche à l'étudier *via* le terme général  $u_n$ .

DÉFINITION 1.4 (Somme partielle)

Avec les notations précédentes,  $S_p$  est la somme partielle d'ordre  $p$  de la série  $\sum u_n$ .

DÉFINITION 1.5 (Série convergente)

Une série  $\sum u_n$  est convergente si la suite  $(S_p)_{p \in \mathbb{N}}$  de ses sommes partielles converge. On

note alors  $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$  la limite de cette suite.

Si  $\sum u_n$  n'est pas convergente, on dit qu'elle est divergente.

DÉFINITION 1.6 (Reste d'une série convergente)

On suppose que  $\sum u_n$  converge. Le reste d'ordre  $p$  de cette série est  $R_p = \sum_{n=p+1}^{+\infty} u_n$ .

REMARQUE 1.7

Ceci est bien défini car les séries  $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$  et  $\sum_{n \geq p} u_n$  ont même nature.

**PROPOSITION 1.8** (Somme partielle et reste)

Soit  $\sum u_n$  une série convergente. Pour tout  $p \in \mathbb{N}$ , on a  $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^p u_n + \sum_{n=p+1}^{+\infty} u_n$ .

En notant  $(S_p)$  et  $(R_p)$  les suites des sommes partielles et des restes d'ordre  $p$  :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = S_p + R_p.$$

**PROPOSITION 1.9** (Divergence grossière)

Soit  $\sum u_n$  une série de nombres convergente. Alors  $u_n \rightarrow 0$ .

REMARQUE 1.10

Si  $(u_n)$  ne tend pas vers 0, on dit que  $\sum u_n$  diverge grossièrement.

ATTENTION !

Il n'y a pas de réciproque. La série  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$  est divergente.

## 2 Séries à termes positifs

### 2.1 Théorèmes de comparaison

**PROPOSITION 2.1**

Soit  $(u_n)$  à termes réels positifs (à partir d'un certain rang). La série  $\sum u_n$  converge ssi la suite  $(S_p)$  des sommes partielles est majorée. On a alors :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{p \rightarrow +\infty} S_p = \sup_{p \in \mathbb{N}} S_p.$$

**PROPOSITION 2.2** (Comparaison de séries à termes positifs)

Soient  $(u_n)$  et  $(v_n)$  deux suites à termes positifs (à partir d'un certain rang).

– On suppose qu'à partir d'un certain rang  $u_n \leq v_n$ . Alors,

• Si  $\sum v_n$  converge,  $\sum u_n$  aussi et  $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$ .

• Si  $\sum u_n$  diverge,  $\sum v_n$  aussi.

– On suppose que  $u_n = O(v_n)$  (ou  $u_n = o(v_n)$ ). Alors,

• Si  $\sum v_n$  converge,  $\sum u_n$  aussi.

• Si  $\sum u_n$  diverge,  $\sum v_n$  aussi.

– On suppose que  $u_n \sim v_n$ . Alors  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  ont même nature.

ATTENTION !

Ces résultats sont faux en général si les suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  ne sont pas à termes positifs.

## 2.2 Séries géométriques, critère de d'Alembert

### PROPOSITION 2.3

Soit  $z \in \mathbb{C}$ . La série  $\sum z^n$  converge ssi  $|z| < 1$ . On a alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z} \text{ et } \sum_{n=p}^{+\infty} z^n = \frac{z^p}{1-z}.$$

### THÉORÈME 2.4 (Critère de d'Alembert)

Soit  $\sum u_n$  une série à termes positifs. On suppose que  $\frac{u_{n+1}}{u_n}$  a une limite  $\ell \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ .

- Si  $\ell < 1$ ,  $\sum u_n$  converge.
- Si  $\ell > 1$ ,  $\sum u_n$  diverge grossièrement.

### REMARQUE 2.5

Dans le cas limite  $\ell = 1$ , on ne peut rien dire *a priori*.

Ainsi,  $\sum \frac{1}{n}$  diverge mais  $\sum \frac{1}{n^2}$  converge.

## 2.3 Séries de Riemann

### LEMME 2.6 (Comparaison série-intégrale)

Soit  $a \in \mathbb{R}_+$ . Soit  $f$  une fonction continue, positive et décroissante sur  $[a, +\infty[$ . La série

de terme général  $u_n = \left( \int_n^{n+1} f(t) dt \right) - f(n)$  (définie pour  $n \geq [a]$ ) est convergente.

### REMARQUE 2.7

On peut reformuler en disant que, sous ces hypothèses, la série  $\sum f(n)$  est convergente

ssi la suite  $\left( \int_a^n f(t) dt \right)_n$  est convergente.

### REMARQUE 2.8

Ce n'est pas le seul cas où on peut effectuer une comparaison série-intégrale ; cf. la méthode pour l'obtention de la formule de Stirling.

### THÉORÈME 2.9 (Séries de Riemann)

Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$ . La série  $\sum \frac{1}{n^\alpha}$  est convergente ssi  $\alpha > 1$ .

### EXERCICE 2.10 (Séries de Bertrand)

Soient  $\alpha, \beta > 0$ .

Montrer que la série  $\sum \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$  est convergente ssi  $\alpha > 1$  ou ( $\alpha = 1$  et  $\beta > 1$ ).

**PROPOSITION 2.11** (Règle du  $n^\alpha u_n$ )

Soit  $\sum u_n$  une série à termes positifs.

- Si il existe  $\alpha > 1$  tel que  $n^\alpha u_n \rightarrow 0$ , alors  $\sum u_n$  converge.
- Si il existe  $\alpha \leq 1$  tel que  $n^\alpha u_n \rightarrow +\infty$ , alors  $\sum u_n$  diverge.

## 2.4 Asymptotique des séries de Riemann

EXEMPLE 2.12

On considère les séries de Riemann  $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ , où  $\alpha > 0$ .

- Si  $\alpha = 1$ ,  $\sum_{n=1}^p \frac{1}{n} \sim \ln p$ ;
- Si  $\alpha < 1$ ,  $\sum_{n=1}^p \frac{1}{n^\alpha} \sim \frac{p^{1-\alpha}}{1-\alpha}$
- Si  $\alpha > 1$ ,  $\sum_{n=p}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \sim \frac{1}{(\alpha-1)p^{\alpha-1}}$ .

REMARQUE 2.13

Le deuxième équivalent est encore valable si  $\alpha < 0$ . On préférera écrire, pour  $\beta \geq 0$  :

$$\sum_{n=0}^p n^\beta \sim \frac{n^{\beta+1}}{\beta+1}.$$

**THÉORÈME 2.14** (Séries et équivalents – HP)

Soient  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  deux séries à termes réels positifs, tels que  $u_n \sim v_n$ .

- Si  $\sum v_n$  est convergente, alors  $\sum u_n$  aussi.

En notant  $R_p(u) = \sum_{n=p+1}^{+\infty} u_n$  et  $R_p(v) = \sum_{n=p+1}^{+\infty} v_n$ , on a  $R_p(u) \sim R_p(v)$ .

- Si  $\sum v_n$  est divergente, alors  $\sum u_n$  aussi.

En notant  $S_p(u) = \sum_{n=0}^p u_n$  et  $S_p(v) = \sum_{n=0}^p v_n$ , on a  $S_p(u) \sim S_p(v)$ .

## 2.5 Formule de Stirling

### LEMME 2.15

Il existe une constante  $A \in \mathbb{R}$  telle que

$$\ln(n!) = n \ln n - n + \frac{1}{2} \ln n + A + o(1).$$

### COROLLAIRE 2.16 (Formule de Stirling)

On a l'équivalent suivant  $n! \sim e^A \sqrt{n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$ .

### REMARQUE 2.17

On sait que  $e^A = \sqrt{2\pi}$ . La démonstration habituelle utilise les intégrales de Wallis

$$W_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x \, dx.$$

On a montré en exercice que

$$\forall n \in \mathbb{N}, W_{2n} = \frac{\pi}{2 \times 4^n} \frac{(2n)!}{(n!)^2} \text{ et } W_{2n+1} = 4^n \frac{(n!)^2}{(2n+1)!}.$$

En considérant  $W_{2n} \times W_{2n+1}$ , on en a déduit l'équivalent  $W_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$ . En utilisant la formule de Stirling dans l'expression obtenue pour  $W_{2n}$ , on en déduit la valeur de  $e^A$ .

## 3 Séries à termes quelconques

### 3.1 Convergence absolue

DÉFINITION 3.1 (Convergence absolue)

Soit  $(u_n)$  une suite à termes réels ou complexes.

La série  $\sum u_n$  est absolument convergente si la série  $\sum |u_n|$  est convergente.

### THÉORÈME 3.2

Si  $\sum u_n$  est absolument convergente, alors  $\sum u_n$  est convergente. De plus,

$$\left| \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|.$$

DÉFINITION 3.3 (Séries semi-convergentes)

Une série  $\sum u_n$  est semi-convergente si elle est convergente mais pas absolument convergente.

#### REMARQUE 3.4

Pour une série  $\sum u_n$  à termes quelconques, on peut donc distinguer les comportements suivants :

- Divergence grossière :  $(u_n)$  ne tend pas vers 0
- Divergence non grossière :  $(u_n)$  tend vers 0 mais  $\sum u_n$  diverge
- Semi-convergence :  $\sum u_n$  converge, mais pas  $\sum |u_n|$
- Absolue convergence :  $\sum |u_n|$  converge, donc  $\sum u_n$  aussi

Des exemples de séries semi-convergentes seront donnés en application du critère des séries alternées.

### 3.2 Séries alternées

#### DÉFINITION 3.5 (Série alternée)

Une série  $\sum u_n$  à termes réels est alternée si la suite  $((-1)^n u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est de signe constant.

#### THÉORÈME 3.6 (Critère des séries alternées)

Soit  $\sum u_n$  une série alternée telle que  $(|u_n|)_{n \in \mathbb{N}}$  décroît et tend vers 0. Alors,  $\sum u_n$  est convergente. De plus, pour tout  $p \in \mathbb{N}$ ,  $R_p = \sum_{n=p}^{+\infty} u_n$  est du signe de  $u_p$  et vérifie  $|R_p(u)| \leq |u_p|$ .

#### EXEMPLE 3.7

Pour tout  $\alpha > 0$ , la série  $\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$  est convergente. Elle est absolument convergente pour  $\alpha > 1$  et semi-convergente sinon.

#### EXERCICE 3.8

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose  $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ .

1. Montrer qu'il existe un réel  $\gamma$  tel que  $H_n = \ln n + \gamma + o(1)$ .
2. En déduire que  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\ln 2$ .

### 3.3 Exemples d'études de convergence

#### EXERCICE 3.9

Déterminer la nature de la série  $\sum_{n \geq 1} \ln \left( 1 + \frac{(-1)^n}{n^\alpha} \right)$ , pour  $\alpha > 0$ .

#### EXERCICE 3.10

Déterminer la nature de la série  $\sum \frac{(-1)^n}{n^{2/3} + \cos n}$ .