DM 15 - Séries – Corrigé

1 Exercice – Deux études de série**1.1 Série** $\sum (-1)^n \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}}{n^\alpha}$

On calcule rapidement que $\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1} = \frac{1}{\sqrt{n}} + O(n^{-3/2})$. Donc, le terme général de la série étudié vaut $(-1)^n \frac{1}{n^{\alpha+1/2}} + O(n^{-(\alpha+3/2)})$; en particulier, il est équivalent à $(-1)^n \frac{1}{n^{\alpha+1/2}}$.

- Si $\alpha \leq -1/2$, la série est grossièrement divergente.
- Si $\alpha > -1/2$, la série de terme général $(-1)^n \frac{1}{n^{\alpha+1/2}}$ est convergente par le critère des séries alternées et celle de terme général $O(n^{-\alpha+3/2})$ est absolument convergente car $\alpha + 3/2 > 1$, par comparaison avec une série de Riemann. Donc, la série est convergente dans ce cas.

1.2 La série $\sum \sin(n!e\pi)$

1. On a

$$R_p = \sum_{n=p}^{+\infty} \frac{1}{n!} = \sum_{n=p}^{+\infty} \frac{1}{p!(p+1) \times \dots \times n} \leq \frac{1}{p!} \sum_{n=p}^{+\infty} \frac{1}{(p+1)^{n-p}} = \frac{1}{p!} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{p+1}} = \frac{1}{p!} \times \frac{p+1}{p} = O\left(\frac{1}{p!}\right).$$

2. On a $R_p = \frac{1}{p!} + \frac{1}{(p+1)!} + R_{p+2}$. Donc, $p!R_p = 1 + \frac{1}{p+1} + p!O\left(\frac{1}{(p+2)!}\right)$. Or, $\frac{1}{p+1} = \frac{1}{p} + O\left(\frac{1}{p^2}\right)$ et $O\left(\frac{p!}{(p+2)!}\right)$ est aussi un $O\left(\frac{1}{p^2}\right)$. Donc,

$$p!R_p = 1 + \frac{1}{p} + O\left(\frac{1}{p^2}\right).$$

3. On a $e = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} + R_n$. Donc, $n!e\pi = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n!}{k!} \pi + n!R_n\pi$. Les termes $\frac{n!}{k!}$ pour $k \leq n-2$ sont des entiers pairs; le dernier terme $\frac{n!}{(n-1)!}$ vaut n . Ainsi, on peut écrire $n!e\pi = (2\ell + n)\pi + n!R_n\pi$, où $\ell \in \mathbb{N}$. Donc,

$$\sin(n!e\pi) = (-1)^{2\ell+n} \sin(n!R_n\pi) = (-1)^n \sin(n!R_n\pi).$$

4. On a donc

$$\sin(n!e\pi) = (-1)^n \sin\left(\pi + \frac{\pi}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

5. Le terme $(-1)^{n+1} \frac{\pi}{n}$ est le terme général d'une série convergente par application du critère des séries alternées. Le terme $O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ est le terme d'une série absolument convergente par comparaison avec une série de Riemann. Donc, par somme, la série $\sum \sin(n!e\pi)$ est convergente.

2 Problème – Un résultat sur les séries numériques

2.1 Transformation d'Abel

1. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $v_k = V_k - V_{k-1}$ (avec $V_{-1} = 0$). Donc,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^n u_k v_k &= \sum_{k=0}^n u_k (V_k - V_{k-1}) \\ &= \sum_{k=0}^n u_k V_k - \sum_{\ell=0}^{n-1} u_{\ell+1} V_\ell \\ &= u_n V_n + \sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1} - u_k) V_k.\end{aligned}$$

2. On suppose que (u_n) et (v_n) vérifient ces conditions. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\sum_{k=0}^n u_k v_k = u_n V_n - \sum_{k=0}^{n-1} V_k (u_k - u_{k+1}).$$

Comme (u_n) tend vers 0 et que V_n est bornée, $(u_n V_n)$ tend vers 0. De plus, comme (u_n) est décroissante :

$$\sum_{k=0}^{n-1} |V_k (u_k - u_{k+1})| = \sum_{k=0}^{n-1} |V_k| (u_k - u_{k+1}) \leq \sum_{k=0}^{n-1} M (u_k - u_{k+1}) = M(u_0 - u_n) \leq M u_0,$$

où on a noté M un majorant de $(|V_k|)$. Ceci montre que la série $\sum V_k (u_k - u_{k+1})$ est absolument convergente, donc convergente.

Ainsi, quand $n \rightarrow +\infty$, $u_n V_n$ et $\sum_{k=0}^{n-1} V_k (u_k - u_{k+1})$ tendent vers une limite finie. Donc la série $\sum u_n v_n$ est convergente.

3. **Une application :** Comme $\left| \frac{e^{in\theta}}{n^\alpha} \right| = \frac{1}{n^\alpha}$, on sait déjà que la série $\sum \frac{e^{in\theta}}{n^\alpha}$ est absolument convergente ssi $\alpha > 1$. Notons $u_n = \frac{1}{n^\alpha}$ et $v_n = e^{in\theta}$. Alors (u_n) est une suite décroissante de réels, tendant vers 0. De plus,

$$V_n = \sum_{k=0}^n v_k = \sum_{k=0}^n e^{ik\theta} = \frac{1 - e^{i(n+1)\theta}}{1 - e^{i\theta}} \text{ si } \theta \neq 0 [2\pi].$$

On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, (si $\theta \neq 0 [2\pi]$) : $|V_n| \leq \frac{2}{|1 - e^{i\theta}|}$ et donc $(|V_n|)$ est majorée.

Par le critère d'Abel, on en déduit que la série $\sum \frac{e^{in\theta}}{n^\alpha}$ est convergente pour tout $\alpha > 0$, et pour tout $\theta \neq 0 [2\pi]$.

Si $\theta \equiv 0 [2\pi]$, on a $\frac{e^{in\theta}}{n^\alpha} = \frac{1}{n^\alpha}$, de sorte que cette série converge ssi $\alpha > 1$.

2.2 Séries $\sum \frac{u_n}{S_n^\alpha}$

4. Soit $\alpha > 1$.

a) Comme les u_n sont positifs, (S_n) est croissante. Par décroissance de $x \mapsto x^\alpha$, on a $\frac{1}{t^\alpha} \leq \frac{1}{S_n^\alpha}$, pour tout $t \in [S_{n-1}, S_n]$. Donc,

$$\int_{S_{n-1}}^{S_n} \frac{dt}{t^\alpha} \geq \frac{1}{S_n^\alpha} \int_{S_{n-1}}^{S_n} dt = \frac{S_n - S_{n-1}}{S_n^\alpha} = \frac{u_n}{S_n^\alpha}.$$

b) Au vu de la majoration précédente, et comme les séries considérées sont à termes positifs, il suffit de montrer que la série $\sum \int_{S_{n-1}}^{S_n} \frac{dt}{t^\alpha}$ est convergente. Or, si $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=1}^n \int_{S_{k-1}}^{S_k} \frac{dt}{t^\alpha} = \int_{S_0}^{S_n} \frac{dt}{t^\alpha} = \left[\frac{1}{(1-\alpha)t^{\alpha-1}} \right]_{S_0}^{S_n} = \frac{1}{\alpha-1} (S_0^{1-\alpha} - S_n^{1-\alpha}) \leq \frac{S_0^{1-\alpha}}{\alpha-1} \text{ car } \alpha > 1.$$

Ceci montre que la série $\sum \int_{S_{n-1}}^{S_n} \frac{dt}{t^\alpha}$ est une série majorée de réels positifs. Donc, elle converge ; donc la série $\sum \frac{u_n}{S_n^\alpha}$ aussi.

5. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\sum_{k=0}^n \frac{u_k}{S_k^\alpha} \geq \sum_{k=0}^n \frac{u_k}{S_n^\alpha} = S_n^{1-\alpha}.$$

La première inégalité vient de la croissance de (S_n^α) . Or $1-\alpha > 0$ et $S_n \rightarrow +\infty$. On en déduit que $S_n^{1-\alpha} \rightarrow +\infty$. Donc, par comparaison, $\sum \frac{u_n}{S_n^\alpha}$ est une série divergente.

6. On considère le cas limite $\alpha = 1$.

a) On suppose que $\sum a_n$ est convergente. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on note $S_p = \sum_{n=0}^p a_n$. On note aussi $\ell = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$. Soit $\varepsilon > 0$. On pose $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall p \geq N+1, |S_p - \ell| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Soient $p, q \geq N$, avec $q > p$. On a

$$\left| \sum_{n=p}^q a_n \right| = |S_q - S_{p-1}| \leq |S_q - \ell| + |S_{p-1} - \ell| \leq 2 \times \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

La condition est bien vérifiée.

b) Pour tout $n \in \llbracket N, N+p \rrbracket$, on a $S_n \leq S_{N+p}$. Donc,

$$\sum_{n=N}^{N+p} \frac{u_n}{S_n} \geq \sum_{n=N}^{N+p} \frac{u_n}{S_{N+p}} = \frac{S_{N+p} - S_{N-1}}{S_{N+p}} = 1 - \frac{S_{N-1}}{S_{N+p}}.$$

Or, quand $p \rightarrow +\infty$, $\frac{S_{N-1}}{S_{N+p}} \rightarrow 0$. Donc, par localisation asymptotique, quand p est

assez grand, $\sum_{n=N}^{N+p} \frac{u_n}{S_n}$ est plus grand que toute constante strictement inférieure à 1, par exemple $1/2$.

c) Ceci montre que la série $\sum \frac{u_n}{S_n}$ ne vérifie par le critère de Cauchy : pour $\varepsilon = 1/4$ par exemple, si $N \in \mathbb{N}$, en considérant un p comme dans la question précédente, on a $\sum_{n=N}^{N+p} \frac{u_n}{S_n} > \frac{1}{4}$, ce qui nie le critère de Cauchy (N joue le rôle de p et $N+p$ de q dans la définition de ce critère).

Donc, la série $\sum \frac{u_n}{S_n}$ diverge.

7. **Une application :** Notons $u_n = \frac{1}{n}$, pour $n \geq 1$. On sait que $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ est équivalente à $\ln n$.

Donc, pour tout $\beta > 0$, $\frac{u_n}{S_n^\beta} \sim \frac{1}{n \ln^\beta n}$. Comme les séries sont à termes positifs, on en déduit que la nature de $\sum \frac{1}{n \ln^\beta n}$ est la même que celle de $\sum \frac{u_n}{S_n^\beta}$.

D'après ce qui précède, la série de Bertrand $\sum \frac{1}{n \ln^\beta n}$ converge ssi $\beta > 1$.

2.3 Démonstration de l'équivalence

8. On suppose que la série $\sum |a_{n+1} - a_n|$ converge. Soit $\sum u_n$ une série convergente. Soit $n \in \mathbb{N}$, par transformation d'Abel :

$$\sum_{k=0}^n a_k u_k = a_n U_n - \sum_{k=0}^{n-1} U_k (a_{k+1} - a_k),$$

où $U_n = \sum_{k=0}^n u_k$. Comme la série $\sum (a_{n+1} - a_n)$ est absolument convergente par hypothèse, elle est aussi convergente. Donc la suite (a_n) converge. Or (U_n) converge aussi par hypothèse. Donc $(a_n U_n)$ converge.

De plus, si M est un majorant de $(|U_k|)$ (bien définie puisque (U_n) converge), on a :

$$\left| \sum_{k=0}^{n-1} U_k (a_{k+1} - a_k) \right| \leq M \sum_{k=0}^{n-1} |a_{k+1} - a_k|.$$

Donc, la série $\sum U_n (a_{n+1} - a_n)$ est absolument convergente, donc convergente.

Finalement, $\sum a_n u_n$ est convergente.

9. On suppose par l'absurde que (a_n) n'est pas bornée. Alors (a_n) n'est pas majorée ou pas minorée. Par symétrie, on suppose qu'elle n'est pas majorée. On peut alors trouver une extractrice $\phi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{\phi(n)} \geq 2^n$.

On définit une suite u par

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{\phi(n)} = \frac{1}{2^n} \text{ et } \forall k \notin \phi(\mathbb{N}), u_k = 0.$$

La série $\sum u_n$ est convergente (de limite 1) : en effet, si $N \in \mathbb{N}$, on considère le plus grand n tel que $N \geq \phi(n)$. Alors, $\sum_{k=0}^N u_k = \sum_{k=0}^{\phi(n)} u_k \leq \sum_{j=0}^n u_{\phi(j)} = \sum_{j=0}^n \frac{1}{2^j} = 1$. Le changement de variable est possible car les u_k sont nuls si k n'est pas dans l'image de ϕ .

Un calcul analogue montre que $\sum_{k=0}^N a_k u_k = n$, si n est le plus grand entier tel que $N \geq \phi(n)$.

En particulier, $\sum_{k=0}^{\phi(n)} a_k u_k = n \rightarrow +\infty$; donc la série $\sum a_n u_n$ est divergente.

Ceci contredit la propriété *i*) et conclut la preuve par l'absurde.

10. a) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\sum_{k=0}^n \varepsilon_k (a_{k+1} - a_k) = \sum_{k=1}^{n+1} \varepsilon_{k-1} a_k - \sum_{k=0}^n \varepsilon_k a_k = \varepsilon_n a_{n+1} - \varepsilon_0 a_0 + \sum_{k=1}^n (\varepsilon_{k-1} - \varepsilon_k) a_k.$$

La suite $(\varepsilon_n a_{n+1})$ tend vers 0 car (a_n) est bornée. Le terme $\varepsilon_0 a_0$ est une constante. Enfin, la série $\sum (\varepsilon_{n-1} - \varepsilon_n)$ converge (vers ε_0 par télescopage et le fait que $\varepsilon_n \rightarrow 0$), donc par propriété *i*), la somme $\sum_{k=1}^n (\varepsilon_{k-1} - \varepsilon_k) a_k$ converge, quand $n \rightarrow +\infty$.

Finalement, la série $\sum \varepsilon_n (a_{n+1} - a_n)$ est convergente.

b) On note $\widetilde{\varepsilon}_n = \operatorname{sgn}(a_{n+1} - a_n) \varepsilon_n$, où $\operatorname{sgn}(x)$ vaut 1 si $x \geq 0$ et -1 sinon. La suite $(\widetilde{\varepsilon}_n)$ tend aussi vers 0. Donc, la série $\sum \widetilde{\varepsilon}_n (a_{n+1} - a_n)$ converge. Comme $\widetilde{\varepsilon}_n (a_{n+1} - a_n) = \varepsilon_n |a_{n+1} - a_n|$, ceci conclut.

11. On a montré que si (a_n) vérifiait *i*), alors la série $\sum \varepsilon_n |a_{n+1} - a_n|$ converge, pour toute suite ε_n tendant vers 0. Supposons par l'absurde que $\sum |a_{n+1} - a_n|$ diverge. Alors, en notant S_n sa somme partielle d'ordre n , on a $\varepsilon_n = \frac{1}{S_n} \rightarrow 0$. Pourtant, d'après la question 6, on devrait avoir $\sum \frac{|a_{n+1} - a_n|}{S_n}$ divergente, c'est absurde.

Donc, $\sum |a_{n+1} - a_n|$ est convergente : (a_n) vérifie la propriété *ii*).

Remarque : on a donc utilisé le résultat suivant, issu de la partie 1.2. Si $\sum u_n$ est une série divergente à termes positifs, on peut trouver une suite (ε_n) (à termes positifs) tendant vers 0 telle que $\sum \varepsilon_n u_n$ est encore divergente.