Semaine 21 - Intégration

1 Calcul intégral

Révision des aspects calculatoires. *Mais l'obtention générale de primitives de fonctions rationnelles sera faite dans le chapitre sur les fractions rationnelles.*

2 Asymptotique, séries

Révisions

3 Intégrale des fonctions en escalier

- Subdivision d'un segment, subidivision régulière, pas
- Fonctions en escalier
- Intégrale d'une fonction en escalier
- Inégalité triangulaire, linéarité, positivité, croissance, relation de Chasles

4 Intégrale des fonctions continues par morceaux

- Norme infinie d'une fonction bornée
- Convergence uniforme/ en norme infinie
- Approximation uniforme d'une fonction continue par des fonctions en escalier
- Théorème de Weierstrass : toute fonction continue sur un segment est uniformément approchable par des fonctions polynomiales (admis, pour le moment)
- Fonctions continues par morceaux ; approximation par fonctions en escalier
- Si (f_n) en escalier converge uniformément vers f continue par morceaux, alors $\left(\int f_n\right)$ converge, et la limite ne dépend que de f ; c'est par définition $\int f$
- Propriétés : inégalité triangulaire, linéarité, positivité, croissance, relation de Chasles
- Stricte positivité : si f est continue et positive sur $[a, b]$, et si $\int_a^b f = 0$, alors $f = 0$.
- Inégalité de Cauchy-Schwarz (admis pour le moment ; sera revu plus tard)

5 Formules de Taylor

– Formule de Taylor avec reste intégral
– Inégalité de Taylor-Lagrange ; *l'égalité n'est pas au programme*
– Application à la convergence des sommes de Taylor ; cas de exp.

6 Sommes de Riemann

– Sommes de Riemann à gauche, à droite
– Convergence des sommes de Riemann
  - Avec estimation de l'erreur dans le cas lipschitzien
  - Pour une fonction continue par morceaux en général
– Exemples

7 Questions de cours

– Calcul intégral
– Approximation uniforme d'une fonction continue par des fonctions en escalier
– Stricte positivité de l'intégrale
– Formule de Taylor avec reste intégral (sans la preuve) + démonstration de l'inégalité de Taylor-Lagrange
– Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{N} \frac{x^n}{n!} \to \exp(x)$, quand $N \to +\infty$.
– Convergence des sommes de Riemann avec estimation dans le cas lipschitzien.