

DS 7 de mathématiques

Durée : 4 heures. Les calculatrices et autres technologies sont interdites.

Si vous repérez une possible erreur d'énoncé, vous êtes invité(e) à venir le signaler.

1 Exercice – Étude d'une suite récurrente

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par la récurrence suivante :

$$u_0 = 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \cos(u_n).$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0, 1]$.
2. Représenter graphiquement la dynamique de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
3. Démontrer que (u_n) converge.

2 Exercice – Nombres de Catalan

La suite $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des nombres de Catalan intervient dans de nombreux problèmes combinatoires. On en donne la définition suivante :

$$C_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*, C_n = \sum_{k=0}^{n-1} C_k C_{n-k-1}.$$

On se propose de donner une formule close pour C_n par un argument asymptotique.

1. Soit f une fonction admettant au voisinage de 0 un développement limité à l'ordre N :

$$f(x) = \sum_{n=0}^N a_n x^n + o(x^N).$$

Montrer que $1 + xf(x)^2 = 1 + \sum_{n=1}^N \left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k a_{n-k-1} \right) x^n + o(x^N).$

2. On définit f sur $] -\infty, 1/4]$ par $f(x) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{2x}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 1$. Montrer que f admet un développement limité à tout ordre en 0.

On ne demande pas de calculer ce développement pour le moment.

3. Montrer que, pour tout $x \in] -\infty, 1/4]$, on a $f(x) = 1 + xf(x)^2$.

En déduire que, pour tout $N \in \mathbb{N}$, $f(x) = \sum_{n=0}^N C_n x^n + o(x^N).$

4. En calculant explicitement le développement limité à tout ordre de f en 0, en déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$.
5. Donner un équivalent de C_n .

3 Exercice – Un calcul d'équivalent

On souhaite déterminer un équivalent de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, définie par la récurrence forte suivante :

$$x_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*, x_n = x_{n-1} + \frac{1}{\sum_{k=0}^{n-1} x_k}.$$

1. Montrer que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et qu'elle a une limite.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x_n^2 - x_{n-1}^2 \geq \frac{2}{n}$.
3. En déduire que, pour tout $n \geq 1$, $x_n \geq \sqrt{2 \ln n}$.
4. On cherche à donner un équivalent de $\sum_{k=1}^n \sqrt{\ln k}$, quand $n \rightarrow +\infty$.
 - (a) Montrer que $\sum_{k=1}^n \sqrt{\ln k} = n\sqrt{\ln n} - \sum_{k=1}^{n-1} k(\sqrt{\ln(k+1)} - \sqrt{\ln k})$.
 - (b) Montrer que $k(\sqrt{\ln(k+1)} - \sqrt{\ln k}) \rightarrow 0$, quand $k \rightarrow +\infty$.
 - (c) En déduire que $\sum_{k=1}^n \sqrt{\ln k} \sim n\sqrt{\ln n}$.
5. On fixe $\varepsilon > 0$. Montrer que, pour n assez grand, $x_n - x_{n-1} \leq \frac{1+\varepsilon}{n\sqrt{2 \ln n}}$.
6. À l'aide d'une comparaison série-intégrale, montrer que la série $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n\sqrt{\ln n}}$ est divergente et donner un équivalent de $\sum_{k=2}^n \frac{1}{k\sqrt{\ln k}}$, quand $n \rightarrow +\infty$.
7. Conclure.

4 Problème – Théorème d'unicité de Cantor

Le but du problème est d'établir le théorème suivant, démontré par Georg Cantor en 1870.

Soit $(c_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sum_{n=-N}^N c_n e^{inx} \rightarrow 0$, quand $N \rightarrow +\infty$.

Alors, $c_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Le problème se compose de 4 parties. Les deux premières sont indépendantes et seuls leurs résultats principaux sont utilisés dans la partie 3. La partie 4 utilise seulement le résultat principal de la partie 3.

4.1 Un lemme sur les séries

Soit $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$ une série de nombres complexes convergente de somme nulle ; pour tout $n \in \mathbb{N}$,

on note $s_n = \sum_{k=0}^n a_k$. On définit la fonction U sur $\mathbb{R}$ par $U(x) = \frac{\sin^2 x}{x^2}$ si $x \neq 0$ et $U(0) = 1$.

1. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}^*$, la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n U(nt)$ est absolument convergente.

On note $S(t)$ la somme de cette série et on souhaite montrer que $S(t) \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow 0$.

2. Soit $N \in \mathbb{N}$, soit $t \in \mathbb{R}^*$. Montrer que

$$\sum_{n=0}^N a_n U(nt) = \sum_{n=0}^{N-1} s_n \left(U(nt) - U((n+1)t) \right) + s_N U(Nt).$$

En déduire que $\sum s_n \left(U(nt) - U((n+1)t) \right)$ est convergente et que

$$S(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} s_n \left(U(nt) - U((n+1)t) \right).$$

3. **Majoration des séries** $\sum \left| U(nt) - U((n+1)t) \right|$.

- (a) Calculer U' sur $\mathbb{R}_+^*$. Montrer que U' est prolongeable par continuité en 0 et que

$$U'(x) = O\left(\frac{1}{x^2}\right) \text{ quand } x \rightarrow +\infty.$$

- (b) En déduire qu'il existe $A > 0$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $|U'(x)| \leq \frac{A}{1+x^2}$.

- (c) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in \mathbb{R}_+$, $\left| U(nt) - U((n+1)t) \right| \leq \frac{At}{1+n^2 t^2}$.

- (d) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $t \in \mathbb{R}_+$,

$$\left| U(nt) - U((n+1)t) \right| \leq A \left(\arctan(nt) - \arctan((n+1)t) \right).$$

(e) En déduire qu'il existe $B > 0$ tel que, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left| U(nt) - U((n+1)t) \right| \leq B.$$

4. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\left| \sum_{n=N}^{+\infty} s_n \left(U(nt) - U((n+1)t) \right) \right| \leq \varepsilon.$$

5. Avec le même N qu'à la question précédente, montrer que, pour t suffisamment petit,

$$\left| \sum_{n=0}^{N-1} s_n \left(U(nt) - U((n+1)t) \right) \right| \leq \varepsilon. \text{ Conclure.}$$

4.2 Un lemme de convexité

Si f est une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on note – sous réserve d'existence – Δf la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\forall x \in \mathbb{R}, (\Delta f)(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2}$.

6. Montrer que si f est de classe $\mathcal{C}^2$, alors Δf existe et coïncide avec f'' .

7. On suppose que $\Delta f > 0$ sur $\mathbb{R}$ et on veut montrer que f est convexe. On raisonne par l'absurde.

(a) Montrer qu'on peut trouver trois réels $a < c < b$ tels que

$$f(c) > f(a) + (c-a) \frac{f(b) - f(a)}{b-a}.$$

(b) En déduire qu'on peut trouver une fonction affine ℓ telle que $g = f + \ell$ vérifie :

- $g(a) = g(b) = 0$;
- $\Delta g > 0$;
- Le maximum de g sur $[a, b]$ est strictement positif.

(c) On note x_0 un point de $]a, b[$ en lequel g atteint son maximum. Montrer que $(\Delta g)(x_0) \leq 0$ pour aboutir à une contradiction.

8. On suppose désormais que $\Delta f = 0$. Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, $f_\varepsilon : x \mapsto f(x) + \varepsilon x^2$ est convexe. En déduire que f est convexe.

9. On suppose toujours que $\Delta f = 0$. Montrer de même que f est concave. En déduire que f est affine.

4.3 Théorème d'unicité – Cas $c_n \rightarrow 0$

On considère¹ $(c_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sum_{n=-N}^N c_n e^{inx} \rightarrow 0$, quand $N \rightarrow +\infty$.

On suppose dans un premier temps que $c_n \rightarrow 0$, quand $n \rightarrow +\infty$ et quand $n \rightarrow -\infty$.

Pour $N \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, on définit² $F_N(x) = c_0 \frac{x^2}{2} + \sum_{n \in \mathbb{Z}_N^*} \frac{c_n}{(in)^2} e^{inx}$, où $\mathbb{Z}_N^* = \llbracket -N, N \rrbracket \setminus \{0\}$.

10. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F_N(x)$ converge quand $N \rightarrow +\infty$.

On note $F(x) = c_0 \frac{x^2}{2} + \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{c_n}{(in)^2} e^{inx}$ sa limite.

Pour tout $h \neq 0$ et tout $x \in \mathbb{R}$, on note $(\Delta_h F)(x) = \frac{F(x+h) + F(x-h) - 2F(x)}{h^2}$.

11. Montrer que $(\Delta_h F)(x) = c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx}) \left(\frac{\sin(nh/2)}{nh/2} \right)^2$.

12. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(\Delta_h F)(x) \rightarrow 0$, quand $h \rightarrow 0$.

13. En déduire qu'il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{c_n}{n^2} e^{inx} = c_0 \frac{x^2}{2} + \beta x + \alpha.$$

14. Montrer que c_0 et β sont nuls.

15. Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, on définit G_N par $G_N(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}_N^*} \frac{c_n}{n^2} e^{inx}$.

Montrer que $(G_N)_{N \geq 1}$ converge uniformément vers $G : x \mapsto \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{c_n}{n^2} e^{inx}$.

16. Soit $k \in \mathbb{Z}$ et $N \geq |k|$. Calculer $\int_0^{2\pi} G_N(t) e^{-ikt} dt$.

17. En déduire que pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $c_k = 0$.

4.4 Conclusion dans le cas général

La suite $(c_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ vérifie toujours $\sum_{n=-N}^N c_n e^{inx} \rightarrow 0$ quand $N \rightarrow +\infty$, pour tout $x \in \mathbb{R}$; mais on ne suppose plus que $c_n \rightarrow 0$.

¹On remarque que l'hypothèse est équivalente à la convergence de $\sum_{n \geq 1} (c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx})$ et à l'identité $c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx}) = 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}$. On préférera manipuler ainsi l'hypothèse pour ne pas évoquer de *séries indexées par $\mathbb{Z}$* .

²Le dénominateur $(in)^2 = -n^2$ est ainsi écrit pour simplifier les calculs ultérieurs.

18. Montrer que, pour tous $x, u \in \mathbb{R}$, on a $\sum_{n=-N}^N (c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx}) e^{inu} \rightarrow 0$,
quand $N \rightarrow +\infty$.
19. En déduire que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on a $c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx} = 0$.
20. Conclure.