DS 7 de mathématiques

Durée : 4 heures. Les calculatrices et autres technologies sont interdites.

Si vous repérez une possible erreur d'énoncé, vous êtes invité(e) à venir le signaler.

1 Étude d'une suite récurrente

1. La fonction cos est décroissante sur $[0, \pi/2]$ et on a $\cos(0) = 1$ et $\cos(\pi/2) = 1$. Comme $1 < \dfrac{\pi}{2}$, on a donc $\cos\big([0,1]\big) \subset \cos\big([0,\pi/2]\big) = [0,1]$. Ainsi, $[0,1]$ est un intervalle de stabilité de cos. Comme $u_0 = 0 \in [0,1]$, $u_n \in [0,1]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. cf. fichier annexe. La suite semble converger vers l'unique point fixe de cos sur $[0,1]$, avec la suite des termes d'indice pair croissante et celle des termes d'indice impair décroissante.
Les traits rouges sont censés être horizontaux et verticaux.

3. Comme cos est décroissante sur $[0,1]$, $\cos\circ\cos$ est croissante sur $[0,1]$. Donc, les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones ; comme $u_0 = 0$ et que $u_1 = 1$, nécessairement (u_{2n}) est croissante tandis que (u_{2n+1}) est décroissante. Ces deux suites sont donc convergentes et la limite α est un point fixe de $\cos\circ\cos$.
Notons $f : x \mapsto x - \cos\circ\cos(x)$. Alors $f'(x) = 1 - \sin x \sin\circ\cos x$. Donc, $f'(x) \geq 0$; donc f est strictement croissante (on a $|\sin x| < 1$ sur $[0,1]$). Ainsi, f ne peut s'annuler qu'une fois ; comme $\cos\circ\cos$ doit avoir un point fixe par ce qui précède, elle en a exactement un.
Ainsi, les deux suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers la même limite. Donc, (u_n) converge aussi vers cette limite (et nécessairement cette limite α est un point fixe de cos ; *on aurait pu remarquer dès le début que* cos *a un seul point fixe, mais ça ne permet pas de conclure.*)

Le nombre α est le nombre de Dottie. On sait qu'il est transcendant par le théorème d'Hermite-Lindemann. On a $\alpha \cong 0,739$.

2 Exercice – Nombres de Catalan

1. On calcule :

$$\begin{aligned}
1+xf(x)^2 &= 1+x\Big(\sum_{k=0}^{N}a_kx^k+o(x^N)\Big)\Big(\sum_{p=0}^{N}a_px^p+o(x^N)\Big)\\
&= 1+\sum_{0\le k,p\le N}a_ka_px^{k+p+1}+o(x^N)\\
&= 1+\sum_{n=1}^{N}\Big(\sum_{\substack{0\le k,p\le n-1\\ k+p=n-1}}a_ka_p\Big)x^n+o(x^N)\\
&= 1+\sum_{n=1}^{N}\Big(\sum_{k=0}^{n-1}a_ka_{n-k-1}\Big)x^n+o(x^N).
\end{aligned}$$

2. Le numérateur admet un développement limité à tout ordre en 0 par opérations usuelles. De plus, ces développements limités démarrent par $2x$ après un calcul rapide. On peut donc diviser par $2x$ un DL du numérateur pour obtenir un DL de f ; ce DL de f est *a priori* valable sur $\mathbb{R}^*$. Mais comme il démarre par 1 et qu'on a défini $f(0)=1$, il est valable sur $\mathbb{R}$.

3. L'égalité est vraie en 0 car on a défini $f(0)=1$. Soit $x\neq 0$. On a

$$xf(x)^2=\frac{1-2\sqrt{1-4x}+(1-4x)}{4x}=\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}-1=f(x)-1.$$

Notons $f(x)=\sum_{k=0}^{N}a_kx^k+o(x^N)$ le développement limité de f à l'ordre N. Par la question précédente, celui de $x\mapsto 1+xf(x)^2$ est :

$$1+xf(x)^2=1+\sum_{n=1}^{N}\Big(\sum_{k=0}^{n-1}a_ka_{n-k-1}\Big)x^n+o(x^N).$$

Comme ces fonctions sont les mêmes, on a par unicité des coefficients des développements limités que :

$$a_0=1 \text{ et } \forall n\ge 1, a_n=\sum_{k=0}^{n-1}a_ka_{n-k-1}.$$

Il s'agit de la relation de récurrence définissant $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$, donc $a_n=C_n$, pour tout $n\in\mathbb{N}$.

4. On commence par rappeler que

$$\sqrt{1+u}-1=\sum_{k=1}^{N}\binom{1/2}{k}u^k+o(u^N).$$

Pour $k\ge 2$, le coefficient binomial $\binom{1/2}{k}$ vaut

$$\binom{1/2}{k}=\frac{\prod_{i=0}^{k-1}(1/2-i)}{k!}=\frac{\prod_{i=0}^{k-1}(1-2i)}{2^kk!}=(-1)^{k-1}\frac{\prod_{i=1}^{k-1}(2i-1)}{2^kk!}.$$

Le numérateur est le produit P des entiers impairs de 1 à $2k-3$, il vaut :

$$P = \frac{(2k-3)!}{\prod_{i=1}^{k-2}(2i)} = \frac{(2k-3)!}{2^{k-2}(k-2)!}.$$

Ainsi, $\binom{1/2}{k} = (-1)^{k-1}\frac{(2k-3)!}{4^{k-1}k!(k-2)!} = \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-2)4^{k-1}}\binom{2k-2}{k}$.
Ensuite, on substitue $-4x$ à u. On a donc :

$$\sqrt{1-4x} - 1 = -2x + \sum_{k=2}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-2)4^{k-1}}\binom{2k-2}{k}(-4x)^k + o(x^N).$$

Puis,

$$1 - \sqrt{1-4x} = 2x + \sum_{k=2}^{n} \frac{4}{2k-2}\binom{2k-2}{k}x^k + o(x^N).$$

On divise par $2x$:

$$f(x) = 1 + \sum_{\ell=1}^{N-1} \frac{1}{\ell}\binom{2\ell}{\ell+1}x^\ell + o(x^{N-1}).$$

Comme N est quelconque, on a obtenu le DL de f à tout ordre. On obtient donc $C_0 = 1$ et, pour tout $n \geq 1$, $C_n = \frac{1}{n}\binom{2n}{n+1} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$ par la formule du chef.

5. Par la formule de Stirling,

$$C_n \sim \frac{1}{n}\frac{(2n)!}{(n!)^2} \sim \frac{\sqrt{4\pi n}\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}}{n \times 2\pi n\left(\frac{n}{e}\right)^{2n}} \sim \frac{4^n}{\sqrt{\pi}n^{3/2}}.$$

3 Exercice – Un calcul d'équivalent

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a $x_n - x_{n-1} = \frac{1}{\sum_{k=0}^{n-1} x_k} \geq 0$ car (x_n) est à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$. Donc, (x_n) est croissante. Par le théorème de la limite monotone, elle admet une limite.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a

$$x_n^2 - x_{n-1}^2 = \frac{2x_{n-1}}{\sum_{k=0}^{n-1} x_k} + \frac{1}{\left(\sum_{k=0}^{n-1} x_k\right)^2} \geq \frac{2x_{n-1}}{\sum_{k=0}^{n-1} x_{n-1}} + 0 = \frac{2}{n},$$

par croissance de (x_n).

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a d'après la question précédente :

$$x_n^2 = x_1^2 + \sum_{k=2}^{n}(x_k^2 - x_{k-1}^2) \geq x_1^2 + 2\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k} = 2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k},$$

car $x_1 = 2$. Par décroissance de $\frac{1}{t} \in \mathbb{R}_+^*$, on a $\frac{1}{k} \geq \int_k^{k+1}\frac{dt}{t}$ pour tout $k \geq 1$. Donc, par relation de Chasles, $x_n^2 \geq 2\int_1^{n+1}\frac{dt}{t} = 2\ln(n+1) \geq 2\ln(n)$. Par croissance de $x \mapsto \sqrt{x}$, on en déduit que $x_n \geq \sqrt{2\ln n}$.

4. (a) On calcule :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n-1} k\big(\sqrt{\ln(k+1)}-\sqrt{\ln k}\big) &= \sum_{k=2}^{n}(k-1)\sqrt{\ln k}-\sum_{k=1}^{n-1}k\sqrt{\ln k}\\ &= (n-1)\sqrt{\ln n}-\sum_{k=1}^{n-1}\sqrt{\ln k}\\ &= n\sqrt{\ln n}-\sum_{k=1}^{n-1}\sqrt{\ln k}.\end{aligned}$$

(b) On calcule :

$$\begin{aligned}k\big(\sqrt{\ln(k+1)}-\sqrt{\ln k}\big) &= k\left(\sqrt{\ln k+\frac{1}{k}+o\left(\frac{1}{k}\right)}-\sqrt{\ln k}\right)\\ &= k\sqrt{\ln k}\left(\sqrt{1+\frac{1}{k\ln k}+o\left(\frac{1}{k\ln k}\right)}-1\right)\\ &\sim k\sqrt{\ln k}\times\frac{1}{2k\ln k}\sim\frac{1}{2\sqrt{\ln k}}.\end{aligned}$$

En particulier, $k\big(\sqrt{\ln(k+1)}-\sqrt{\ln k}\big)$ tend vers 0.

(c) Par théorème de Cesàro, comme $k\big(\sqrt{\ln(k+1)}-\sqrt{\ln k}\big)=o(1)$, $\sum_{k=1}^{n-1}k\big(\sqrt{\ln(k+1)}-\sqrt{\ln k}\big)=o(n)$. Comme un $o(n)$ est un aussi un $o(n\sqrt{\ln n})$, l'égalité de la question 4. (a) donne $\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\ln k}\sim n\sqrt{\ln n}$.

5. On a $x_n-x_{n-1}=\frac{1}{\sum_{k=0}^{n-1}x_k}$. Or, par la question 3, $x_k\geq\sqrt{2\ln k}$ si $k\geq 1$, de sorte que $x_n-x_{n-1}\leq\frac{1}{1+\sum_{k=1}^{n-1}\sqrt{2\ln k}}$. Le dénominateur est équivalent à $\sqrt{2}(n-1)\sqrt{\ln(n-1)}$, donc à $n\sqrt{2\ln n}$ d'après la question précédente. En particulier, pour n assez grand, on a $1+\sum_{k=1}^{n-1}\sqrt{2\ln k}\geq\frac{n\sqrt{2\ln n}}{1+\varepsilon}$. Pour un tel n, on obtient l'inégalité annoncée.

6. La fonction $t\mapsto\frac{1}{t\sqrt{\ln t}}$ est décroissante sur $]1,+\infty[$. Soit $k\geq 2$. On a :

$$\frac{1}{(k+1)\sqrt{\ln(k+1)}}\leq\int_k^{k+1}\frac{dt}{t\sqrt{\ln t}}\leq\frac{1}{k\sqrt{\ln k}}.$$

On somme pour k allant de 2 à n. En notant $S_n=\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k\sqrt{\ln k}}$, on obtient :

$$S_n-\frac{1}{2\sqrt{\ln 2}}+\frac{1}{(n+1)\sqrt{\ln(n+1)}}\leq\int_1^{n+1}\frac{dt}{t\sqrt{\ln t}}\leq S_n.$$

Or, $\displaystyle\int_1^{n+1} \frac{dt}{t\sqrt{\ln t}} = 2[\sqrt{\ln t}]_1^{n+1} \sim 2\sqrt{\ln n}$. Par l'inégalité de droite précédente, on en déduit en particulier que $S_n \to +\infty$. Donc, le membre de gauche de cette inégalité est équivalent à S_n. Par comparaison, on a donc $S_n \sim \displaystyle\int_1^{n+1} \frac{dt}{t\sqrt{\ln t}} \sim 2\sqrt{\ln n}$.

7. Notons n_0 un entier à partir duquel l'inégalité de la question 5 est vraie. En sommant les inégalités, on a

$$x_n - x_{n_0} = \sum_{k=n_0}^{n-1} x_{k+1} - x_k \leq \sum_{k=n_0}^{n-1} \frac{1+\varepsilon}{k\sqrt{2\ln k}}.$$

Le membre de droite est équivalent à $(1+\varepsilon)\sqrt{2\ln n}$ (le démarrage de la somme à n_0 ne change rien puisque la série diverge), donc x_n est majoré par une quantité équivalente à $(1+\varepsilon)\sqrt{2\ln n}$; ainsi x_n est majoré par $(1+2\varepsilon)\sqrt{2\ln n}$ à partir d'un certain rang. Avec la minoration de la question 3, on en déduit que pour n assez grand, $\dfrac{x_n}{\sqrt{2\ln n}}$ est compris entre 1 et $1+2\varepsilon$. Comme ε est quelconque, ceci montre que $x_n \sim \sqrt{2\ln n}$.

4 Problème – Théorème d'unicité de Cantor

4.1 Un lemme sur les séries

1. La suite (a_n) est convergente donc bornée. On note A un réel strictement positif tel que $|a_n| \leq A$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors,

$$\sum_{n=0}^{N} |a_n U(nt)| \leq A|U(0)| + \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2t^2}.$$

Comme la série $\sum \frac{1}{n^2}$ est convergente, la série $\sum a_n U(nt)$ est absolument convergente.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $a_n = s_n - s_{n-1}$ en convenant que $s_{-1} = 0$. On calcule :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N} a_n U(nt) &= \sum_{n=0}^{N} (s_n - s_{n-1}) U(nt) \\ &= \sum_{n=0}^{N} s_n U(nt) - \sum_{n=-1}^{N-1} s_n U\big((n+1)t\big) \\ &= s_N U(Nt) + \sum_{n=0}^{N-1} s_n \Big(U(nt) - U\big((n+1)t\big)\Big).\end{aligned}$$

Quand $N \to +\infty$, $S_N \to 0$ et $|U(Nt)| \leq \dfrac{1}{N^2t^2}$, donc le terme $s_N U(Nt)$ tend vers 0. Comme $\sum a_n U(nt)$ est convergente par la question précédente, la série $\sum s_n \Big(U(nt) - U\big((n+1)t\big)\Big)$ aussi et, en passant à $N \to +\infty$ dans l'égalité précédente, on a :

$$S(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} s_n \Big(U(nt) - U\big((n+1)t\big)\Big).$$

3. (a) La fonction U est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ par opérations élémentaires. Soit $x > 0$. On a :

$$U'(x) = \frac{2\sin x \cos x \times x^2 - \sin^2 x \times 2x}{x^4} = \frac{\sin(2x)}{x^2} - \frac{2\sin^2 x}{x^3}.$$

En 0, on a $U'(x) = \dfrac{2x + O(x^3)}{x^2} - \dfrac{2x^2 + O(x^4)}{x^3} = O(x) = o(1)$, ce qui montre que U' est prolongeable par continuité en 0 (par la valeur 0).
En $+\infty$, on majore $|U'(x)|$ par $\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{2}{x^3}$; les deux termes sont des $O\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$ donc $U'(x)$ aussi.

(b) On note g la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $g(x) = (1 + x^2)U'(x)$. C'est une fonction continue sur $\mathbb{R}_+^*$ car U' l'est. Par la question précédente, elle a une limite en 0 et elle est $O(1)$ en $+\infty$ (c'est-à-dire bornée au voisinage de $+\infty$). On en déduit classiquement que g est bornée sur $\mathbb{R}_+$. En effet, on peut noter M un majorant de $|g|$ sur un intervalle du type $[B, +\infty]$; par le théorème des bornes atteintes, $|g|$ est majorée par un M_2 sur $[0, B]$ et le maximum de M et M_2 majore $|g|$ sur $\mathbb{R}_+$.
On peut donc trouver A tel que $|g| \leq A$ sur $\mathbb{R}$; cela donne : pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $|g(t)| \leq \dfrac{A}{1+t^2}$.

(c) L'inégalité est valable si $t = 0$ car le membre de gauche est nul dans ce cas.
Soit $t > 0$. Par le théorème des accroissements finis appliquée à U entre nt et $(n+1)t$, il existe $c \in [nt, (n+1)t]$ tel que $U(nt) - U\big((n+1)t\big) = tU'(c)$. Donc,

$$\Big|U(nt) - U\big((n+1)t\big)\Big| \leq t|U'(c)| \leq \frac{At}{1+c^2} \leq \frac{At}{1+n^2t^2},$$

car $c \geq nt$ et que $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+$.

(d) On fixe $t \in \mathbb{R}_+$. La fonction $u \mapsto \dfrac{At}{1+u^2t^2}$ est décroissante donc, si $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{At}{1+n^2t^2} \leq \int_{n-1}^{n} \frac{At}{1+u^2t^2} du = A \int_{(n-1)t}^{nt} \frac{1}{1+v^2} dv = A\Big(\arctan(nt) - \arctan\big((n-1)t\big)\Big).$$

On conclut avec l'inégalité de la question précédente.

(e) On somme les inégalités précédentes pour n allant de 1 à N. On obtient :

$$\sum_{n=1}^{N} \Big|U(nt) - U\big((n+1)t\big)\Big| \leq A \sum_{n=1}^{N} \Big(\arctan(nt) - \arctan\big((n-1)t\big)\Big) = A\arctan(Nt) \leq A\frac{\pi}{2}.$$

Ceci montre que les séries $\sum \Big|U(nt) - U\big((n+1)t\big)\Big|$ convergent et que $\sum_{n=1}^{+\infty} \Big|U(nt) - U\big((n+1)t\big)\Big| \leq A\dfrac{\pi}{2}$. On note $B = \dfrac{A}{\pi}2$.

4. La suite (s_n) tend vers 0 par hypothèse. Donc, on peut trouver un rang N tel que $|s_n| \leq \dfrac{\varepsilon}{B}$ si $n \geq N$. Alors, par inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned}\Big|\sum_{n=N}^{+\infty} s_n\Big(U(nt) - U\big((n+1)t\big)\Big)\Big| &\leq \frac{\varepsilon}{B}\sum_{n=N}^{+\infty}\Big|U(nt) - U\big((n+1)t\big)\Big| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{B}\sum_{n=1}^{+\infty}\Big|U(nt) - U\big((n+1)t\big)\Big| \\ &\leq \varepsilon.\end{aligned}$$

5. La somme étant finie, la quantité $\displaystyle\sum_{n=0}^{N-1} s_n\Big(U(nt) - U\big((n+1)t\big)\Big)$ tend vers 0 quand t tend vers 0 par opérations élémentaires. Donc, pour t assez petit, sa valeur absolue est majorée par ε.
On a $S(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{N-1} s_n\Big(U(nt) - U\big((n+1)t\big)\Big) + \sum_{n=N}^{+\infty} s_n\Big(U(nt) - U\big((n+1)t\big)\Big)$. Les deux termes du membre de droite sont majorés en valeur absolue par ε (le premier quand t est suffisamment petit). Donc, quand t est suffisamment petit, par inégalité triangulaire, $|S(t)| \leq 2\varepsilon$. Par la définition de limite, on a montré que $S(t) \to 0$, quand $t \to 0^+$.
Ceci reste vrai quand $t \to 0$ car U est paire et donc S aussi.

4.2 Un lemme de convexité

6. On suppose f de classe $\mathcal{C}^2$. Alors, à la précision $o(h^2)$ en 0, on a :

$$\begin{aligned}&\frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2} \\ &= \frac{f(x) + hf'(x) + h^2 f''(x)/2 + f(x) - hf'(x) + h^2 f''(x)/2 - 2f(x) + o(h^2)}{h^2} \\ &= f''(x) + o(1).\end{aligned}$$

Et donc, $(\Delta f)(x)$ est bien défini et vaut $f''(x)$.

7. (a) Géométriquement, une fonction est convexe ssi sa courbe représentative est en dessous de toutes ses sécantes (segment de droite joignant deux points de la courbe). Donc, si f n'est pas convexe, on peut trouver deux points $a < b$ et un point $c \in]a, b[$ tels que le point $(c, f(c))$ est strictement au dessus de la sécante reliant les points $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$. Cette sécante a pour équation $y - f(a) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$. On a donc

$$f(c) - f(a) > \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(c - a).$$

On peut bien sûr dire les choses de façon moins géométrique ; soit avec la définition de la convexité, soit avec l'inégalité des pentes ; soit avec la croissance des taux d'accroissement...

(b) On définit g par

$$g(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Par construction, g s'annule en a et en b et s'écrit bien $g = f + \ell$, où ℓ est une fonction affine.
Comme ℓ est en particulier de classe $\mathcal{C}^2$, on a $\Delta\ell = 0$ par la question 6 ; comme l'opérateur Δ est manifestement linéaire (quand il est bien défini), on a $\Delta g = \Delta f + \Delta\ell = \Delta f > 0$.
Enfin, $g(c) > 0$ d'après la question précédente. En particulier, le maximum de g sur $[a, b]$ est strictement positif.

(c) Soit $h \neq 0$ suffisamment petit pour que $x_0 + h$ et $x_0 - h$ soient dans $[a, b]$. Comme par construction, g atteint son maximum en x_0, on a $g(x_0+h)+g(x_0-h)-2g(x_0) \leq g(x_0) + g(x_0) - 2g(x_0) \leq 0$. Donc, après division par h^2 et limite quand $h \to 0$, on obtient $(\Delta g)(x_0) \leq 0$.
Ceci est en contradiction avec ce qui a été dit précédemment. Donc, si $\Delta f > 0$, alors f est convexe.

8. Comme $x \mapsto \varepsilon x^2$ est de classe $\mathcal{C}^2$ de dérivée seconde 2ε, la fonction Δf_ε est bien définie et vaut $\Delta f_\varepsilon : x \mapsto (\Delta f)(x) + 2\varepsilon = 2\varepsilon > 0$. Par la question précédente, f_ε est convexe.
Considérons maintenant $x < y$ et $t \in [0, 1]$. Pour tout $\varepsilon > 0$, on a donc

$$f_\varepsilon\big((1-t)x + ty\big) \leq (1-t)f_\varepsilon(x) + tf_\varepsilon(y),$$

par définition de la convexité. On prend la limite quand $\varepsilon \to 0$ pour obtenir :

$$f\big((1-t)x + ty\big) \leq (1-t)f(x) + tf(y).$$

Ceci montre que f est convexe.

9. Comme $\Delta f = 0$, on a aussi immédiatement $\Delta(-f) = 0$. Donc, $-f$ est convexe par la question précédente. Donc, f est concave.
Ainsi, f est à la fois convexe et concave ; c'est donc une fonction affine (*p. ex. parce que la fonction taux d'accroissement à un point fixé doit être constante*).

4.3 Théorème d'unicité – Cas $c_n \to 0$

10. Soit $x \in \mathbb{R}$. Les deux séries $\sum_{n\geq 1} \frac{c_n}{(in)^2} e^{inx}$ et $\sum_{n\geq 1} \frac{c_{-n}}{(-in)^2} e^{-inx}$ sont absolument convergentes.
En effet, la suite (c_n) est bornée (car elle tend vers 0), de sorte qu'on a une majoration du type $\left|\frac{c_n}{(in)^2} e^{inx}\right| \leq \frac{C}{n^2}$, avec C une constante ; de même pour l'autre série.
Donc, la série $\sum_{n\geq 1} \left(\frac{c_n}{(in)^2} e^{inx} + \frac{c_{-n}}{(-in)^2} e^{-inx}\right)$ converge, ce qui revient à dire que $F_N(x)$ converge quand $N \to +\infty$.

11. On écrit d'abord que

$$F_N(x) = c_0 \frac{x^2}{2} + \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{c_n}{(in)^2} e^{inx} + \frac{c_{-n}}{(in)^2} e^{-inx}\right).$$

On a :

- $(x+h)^2 + (x-h)^2 - 2x^2 = 2h^2$;
- $e^{in(x+h)} + e^{in(x-h)} - 2e^{inx} = e^{inx}(e^{inh} + e^{-inh} - 2) = e^{inx}(e^{inh/2} - e^{inh/2})^2 = e^{inx}(2i\sin(nh/2))^2$;
- De même, $e^{-in(x+h)} + e^{-in(x-h)} - 2e^{inx} = e^{-inx}(2i\sin(nh/2))^2$.

Comme $g \mapsto \Delta_h g$ est manifestement linéaire pour tout h, on obtient :

$$\Delta_h F_N(x) = c_0 + \sum_{n=1}^{N}(e^{inx} + e^{-inx})\frac{(2i\sin(nh/2)^2)}{(inh)^2},$$

ce qu'on peut encore écrire

$$\Delta_h F_N(x) = c_0 + \sum_{n=1}^{N}(e^{inx} + e^{-inx})\left(\frac{\sin(nh/2)}{(nh/2)}\right)^2.$$

Avec x et h fixés, il est clair que $(\Delta_h F_n)(x) \to (\Delta_h F)(x)$ quand $N \to +\infty$. On utilise simplement des opérations sur les limites et le fait que $F_N(x) \to F(x)$, $F_N(x+h) \to F(x+h)$ et $F_N(x-h) \to F(x-h)$.
On passe donc à la limite quand $N \to +\infty$ dans l'égalité précédente (ce qui montre en particulier que la série de droite est convergente) et on obtient :

$$(\Delta_h F)(x) = c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty}(c_n e^{inx} + c_{-n}e^{-inx})\left(\frac{\sin(nh/2)}{(nh/2)}\right)^2.$$

12. Soit $x \in \mathbb{R}$. On peut donc écrire :

$$(\Delta_h f)(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n U(nh/2),$$

où $a_0 = c_0$; $a_n = c_n e^{inx} + c_{-n}e^{-inx}$ si $n \geq 1$ et U est la fonction de la partie I. Par hypothèse, la série $\sum a_n$ est convergente de limite nulle. Avec les notations de la partie I, on sait donc que la fonction S a pour limite 0 en 0. Or, l'égalité précédente peut se réécrire $(\Delta_h f)(x) = S(h/2)$. Donc, $(\Delta_h f)(x) \to 0$ quand $h \to 0$.

13. On doit montrer que $F(x) = -\beta x - \alpha$, où α et β sont deux nombres complexes. Cela revient à montrer que $\mathrm{Re}F$ et $\mathrm{Im}\,F$ sont toutes deux des fonctions affines.
On constate immédiatement que $\mathrm{Re}(\Delta_h F) = \Delta_h(\mathrm{Re}f)$ et de même pour la partie imaginaire. D'après la question précédente, on a donc, en passant à la limite $h \to 0$, que $\Delta(\mathrm{Re}F) = \Delta(\mathrm{Im}\,F) = 0$. Pour conclure, on applique la partie II, mais il faut encore montrer que $\mathrm{Re}F$ et $\mathrm{Im}\,F$ sont continues, c'est-à-dire que F est continue.
Il suffit de montrer que $\phi : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{c_n}{(in)^2}e^{inx}$ est continue ; l'argument est identique pour la série avec des $-n$. Soit $\varepsilon > 0$. On fixe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\sum_{n=N+1}^{+\infty}\frac{|c_n|}{n^2} \leq \frac{\varepsilon}{4}$ (*possible car la série converge*). Alors, si $x, y \in \mathbb{R}$,

$$|\phi(x) - \phi(y)| \leq \sum_{n=1}^{N}\frac{|c_n|}{n^2}|e^{inx} - e^{iny}| + 2\sum_{n=N+1}^{+\infty}\frac{|c_n|}{n^2},$$

par inégalité triangulaire. La première somme est inférieure à $\dfrac{\varepsilon}{2}$ par continuité (c'est une somme finie) si y est suffisamment proche de x. Ainsi, pour un tel y, on a $|\phi(x)-\phi(y)| \leq \varepsilon$; donc ϕ est continue en x. Donc, ϕ est continue.
Remarque : en étant légèrement plus précis, l'argument montre en fait que ϕ est uniformément continue sur $\mathbb{R}$. On pourra comparer cette démonstration à un argument similaire dans le DM sur la fonction de Takagi ; l'an prochain, on utilisera un argument de convergence normale.

14. Toutes les fonctions $x \mapsto e^{inx}$ sont 2π-périodiques. Donc les sommes finies, $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}_N^*} \frac{c_n}{n^2}e^{inx}$ aussi et, par passage à la limite, la fonction $x \mapsto \displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{c_n}{n^2}e^{inx}$ aussi.

    Donc, la fonction $x \mapsto c_0\dfrac{x^2}{2} + \beta x + \alpha$ est 2π-périodique. Nécessairement c_0 et β doivent être nuls.

15. Par définition, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a
$$G(x) - G_N(x) = \sum_{n=N+1}^{+\infty} \Big(\frac{c_n}{n^2}e^{inx} + \frac{c_{-n}}{n^2}e^{-inx}\Big).$$
    En notant $C = \sup\limits_{n\in\mathbb{Z}} |c_n|$, on a donc :
$$\forall x \in \mathbb{R}, |G(x) - G_N(x)| \leq \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{2C}{n^2}.$$
    Le membre de droite est le reste d'ordre N d'une série convergente ; il tend donc vers 0 quand $N \to +\infty$. On a donc majoré $\|G - G_N\|_\infty$ par une suite tendant vers 0 ; donc (G_N) converge uniformément vers G sur $\mathbb{R}$.

16. La somme dans G_N étant finie, on a par linéarité :
$$\int_0^{2\pi} G_N(t)e^{-ikt}dt = \sum_{n\in\mathbb{Z}_N^*} \frac{c_n}{n^2} \int_0^{2\pi} e^{i(n-k)t}dt.$$
    Si $n \neq k$, l'intégrale vaut $\dfrac{1}{n-k}\Big[e^{i(n-k)t}\Big]_0^{2\pi} = 0$. Si $n = k$, on intègre la fonction constante égale à 1 et donc l'intégrale vaut 2π. Ainsi,
$$\int_0^{2\pi} G_N(t)e^{-ikt}dt = 2\pi\frac{c_k}{k^2}.$$

17. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $|G_N(t)e^{-ikt} - G(t)e^{-ikt}| = |G_N(t) - G(t)|$. Donc, comme G_N converge vers G uniformément, de même la suite $\Big(t \mapsto G_N(t)e^{-ikt}\Big)_N$ converge uniformément vers la fonction $t \mapsto G(t)e^{-ikt}$. De plus, G est simplement la fonction constante égale à α.
    On a donc, $\displaystyle\int_0^{2\pi} G_N(t)e^{-ikt}dt \to \int_0^{2\pi} \alpha e^{-ikt}dt$, quand $N \to +\infty$.
    Pour $k \neq 0$, l'intégrale de droite est nulle et celle de gauche vaut $2\pi\dfrac{c_k}{k^2}$ quand $N \geq |k|$.
    Donc, $c_k = 0$ pour tout $k \neq 0$ (et on a déjà montré que $c_0 = 0$).

4.4 Conclusion dans le cas général

18. On utilise l'hypothèse avec $x+u$ et $x-u$.

    On a donc $\sum_{n=-N}^{N} c_n e^{inx} e^{inu} \to 0$ et $\sum_{n=-N}^{N} c_n e^{inx} e^{-inu} \to 0$. Le changement de variable $n \mapsto -n$ dans la deuxième somme donne $\sum_{n=-N}^{N} c_{-n} e^{-inx} e^{inu} \to 0$. En sommant, on obtient la limite demandée.

19. Fixons x. La suite $(c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx})$ tend vers 0 puisque c'est le terme général d'une série convergente. On est donc dans les conditions d'application de la partie précédente, u jouant le rôle de la variable x précédente. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx} = 0$.

20. Soit $n \in \mathbb{N}$. On fait un développement limité à l'ordre 1 :

    $$0 = c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx} = (c_n + c_{-n}) + in(c_n - c_{-n})x + o(x).$$

    Par unicité dans les développements limités, on a $c_n + c_{-n} = 0$ et $c_n - c_{-n} = 0$. Donc $c_n = c_{-n} = 0$. Donc, tous les c_n sont nuls, pour $n \in \mathbb{Z}$.