DM 20 - Series mirabili – Théories de l'intégration

1 La *series mirabili* de Johann Bernoulli

1. a) Pour tout $x \in]0,1]$, $x^x = \exp(x \ln x)$. Quand $x \to 0^+$, $x \ln x$ tend vers 0 par croissance comparée. Donc, par continuité de exp, f tend vers $\exp(0) = 1$ en 0. Donc, on prolonge f par continuité en 0 en posant $f(0) = 1$.

   b) Pour tout $n \geq 2$, $\dfrac{1}{n^n} \leq \dfrac{1}{n^2}$. Or, la série $\sum \dfrac{1}{n^2}$ est convergente. Par comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum_{n\geq 1} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n^n}$ est absolument convergente.

2. **Un calcul d'intégrales.**

   a) On souhaite faire une intégration par parties. Cependant, la fonction ln n'est pas définie en 0. On pose donc $I_{n,p,\varepsilon} = \displaystyle\int_\varepsilon^1 x^n \ln^p x\, dx$, où $\varepsilon > 0$ est fixé.
   On procède par une intégration par parties en écrivant que $x^n \ln^p x = x^n \ln^p x \times 1$. On trouve alors :
   $$\int_\varepsilon^1 x^n \ln^p x\, dx = [x^{n+1} \ln^p x]_\varepsilon^1 - \int_\varepsilon^1 (nx^{n-1} \ln^p x + px^{n-1} \ln^{p-1} x) x\, dx.$$
   On a donc
   $$I_{n,p,\varepsilon} = -\varepsilon^{n+1} \ln^p \varepsilon - nI_{n,p,\varepsilon} - pI_{n,p-1,\varepsilon}.$$
   On fait tendre ε vers 0 ; les intégrales $I_{n,p,\varepsilon}$ tend vers $I_{n,p}$ (car l'intégrale $\displaystyle\int_0^\varepsilon x^n \ln^p x\, dx$ tend vers 0, quand $\varepsilon \to 0$: c'est l'intégrale d'une fonction continue (donc bornée), sur un intervalle dont la longueur tend vers 0). Par croissance comparée, on a donc :
   $$I_{n,p} = -nI_{n,p} - pI_{n,p-1},$$
   d'où $I_{n,p} = -\dfrac{p}{n+1} I_{n,p-1}$.

   b) On itère p fois l'identité précédente et on trouve : $I_{n,p} = (-1)^p \dfrac{p!}{(n+1)^p} I_{n,0}$. En particulier, pour $n = p$:
   $$I_{n,n} = (-1)^n \frac{n!}{(n+1)^n} I_{n,0} = (-1)^n \frac{n!}{(n+1)^{n+1}}.$$

3. Soit $N \in \mathbb{N}$ et soit $x \in \mathbb{R}$. La formule de Taylor-Lagrange appliquée à exp entre 0 et x donne :
   $$|\exp(x) - \sum_{n=0}^{N} \frac{\exp^{(n)}(0)}{n!} x^n| \leq \frac{M_{N+1}}{(N+1)!} |x|^{N+1},$$
   où M_{N+1} est un majorant de $|\exp^{(N+1)}|$ sur le segment $[0,x]$ (ou $[x,0]$). Comme $\exp^{(N+1)} =$ exp et que exp est croissante, on peut prendre, $M_{N+1} = \max(e^x, 1)$, donc :
   $$\forall x \in \mathbb{R}, |e^x - \sum_{n=0}^{N} \frac{x^n}{n!}| \leq \frac{\max(e^x,1)}{(N+1)!} |x|^{N+1}.$$

Si on suppose maintenant que $x \in [a,b]$, $\max(e^x,1) \leq \max(e^b,1)$ et $|x| \leq \max(|a|,|b|)$. En notant $M = \max(e^b,1)$ et $K = \max(|a|,|b|)$, on a donc :

$$\forall x \in [a,b], \forall N \in \mathbb{N}, |e^x - f_N(x)| \leq \frac{M \times C^{N+1}}{(N+1)!}.$$

Le membre de droite tend vers 0 quand $N \to +\infty$, par croissance comparée. On en déduit que f_N converge uniformément vers exp sur le segment $[a,b]$.

4. Pour tout $x \in [0,1]$, on a

$$x^x = \exp(x \ln x) = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} \frac{(x\ln x)^n}{n!} = \lim_{N\to+\infty} f_N(x\ln x).$$

(en convenant que $x\ln x = 0$ pour $x = 0$).
La fonction $x \mapsto x\ln x$ est continue sur le segment $[0,1]$ donc elle y est bornée. En notant $[a,b]$ un segment contenant l'ensemble de ces valeurs, on sait que f_N converge uniformément vers exp sur $[a,b]$. En composant, on en déduit que $x \mapsto f_N(x\ln x)$ converge uniformément vers $x \mapsto x^x$ sur $[0,1]$.
On en déduit que $\lim_{N\to+\infty} \int_0^1 f_N(x\ln x)\,dx = \int_0^1 x^x\,dx$.
Or, $\int_0^1 f_N(x\ln x)\,dx = \sum_{n=0}^{N} \int_0^1 \frac{(x\ln x)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{N} \frac{I_{n,n}}{n!} = \sum_{n=0}^{N} (-1)^n \frac{1}{(n+1)^{n+1}}$ (l'interversion entre la somme finie et l'intégrale vient de la linéarité de l'intégrale). Finalement,

$$\int_0^1 x^x\,dx = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{(n+1)^{n+1}} = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^n}.$$

2 Des théories de l'intégration

2.1 Fonctions réglées

Remarque : l'énoncé aurait dû préciser que les limites à gauche et à droite doivent être finies.

1. (a) La fonction f_n est en escalier. Notons σ une subidivision adaptée et u_k le point de σ le plus proche de x à sa droite. Alors, par définition d'une fonction en escalier, f_n est constante sur $]x, u_k[$. On choisit $\delta < u_k - x$, de sorte que f_n est constante sur $]x, x+\delta]$. Alors, si $y, z \in]x, x+\delta[$, $|f_n(y) - f_n(z)| = 0 \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

   (b) Comme (f_n) converge uniformément vers f, on peut trouver un $N \in \mathbb{N}$ tel que $\|f_N - f\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{4}$. On fixe δ comme à la question précédente pour f_N. Soient $y, z \in]x, x+\delta] \cap [a,b]$. On a

$$|f(y) - f(z)| \leq |f(y) - f_N(y)| + |f_N(y) - f_N(z)| + |f_N(z) - f(z)| \leq \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon.$$

   (c) Soit (y_n) une suite tendant vers x^+. Soit $\varepsilon > 0$. On pose δ comme à la question précédente. Comme (y_n) converge vers x^+, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N, y_n \in]x, x+\delta]$. Donc,

$$\forall n, p \geq N, |f(y_n) - f(y_p)| \leq \varepsilon.$$

Ceci montre que la suite $\big(f(y_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy donc qu'elle est convergente.
Sa limite est indépendante de la suite (y_n) tendant vers x^+. En effet, si (z_n) est une autre telle suite, on peut définir une suite (w_n) telle que $w_{2n} = y_n$ et $w_{2n+1} = z_n$ pour tout n ; comme (w_n) doit aussi être convergente, nécessairement les limites de ses sous-suites (y_n) et (z_n) sont les mêmes.
Ainsi, pour toute suite (y_n) convergeant vers x^+, la suite $\big(f(y_n)\big)$ converge vers une même limite. Par caractérisation séquentielle de la limite, f a une limite à droite en x.

2. On raisonne par l'absurde, en supposant qu'un tel r n'existe pas. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut trouver $y_n \in [a,b]$ tel que pour tout $x \in [a,b]$, $B(y_n, 1/n) \not\subset B(x, \delta_x)$. Cela revient à dire qu'il existe, pour tout $n \in \mathbb{N}$, y_n et z_n dans $[a,b]$ tels que $|y_n - z_n| < \dfrac{1}{n}$ et $|z_n - x| \geq \delta_x$ pour tout $x \in [a,b]$.
Quitte à extraire (par Bolzano-Weierstrass), on peut supposer que (y_n) est convergente. Alors (z_n) est convergente de même limite (car $|y_n - z_n|$ tend vers 0), qu'on note ℓ. Par construction, on a pour tout n, $|z_n - \ell| \geq \delta_\ell$, donc par passage à la limite $0 \geq \delta_\ell$, ce qui est absurde.

3. (a) Soit $x \in [a,b]$. Par hypothèse, f admet une limite à gauche et à droite en x (*on adapte l'argument sans problème si x est une des bornes a ou b*). Il existe donc $\alpha_x > 0$ et $\beta_x > 0$ tels que :
   - Si $a < x - \alpha_x < y < x$, alors $|f(y) - f(x^-)| \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$.
   - Si $x < y < x + \beta_x < b$, alors $|f(y) - f(x^+)| \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$.

   On pose $\delta_x = \min(\alpha_x, \beta_x)$. Si $y, z \in B(x, \delta_x)$ sont du même côté par rapport à x, alors
   - Ou bien $y, z < x$. Alors $x - \alpha_x < y, z < x$.
     Par inégalité triangulaire, $|f(y) - f(z)| \leq |f(y) - f(x^-)| + |f(x^-) - f(z)| \leq \varepsilon$.
   - Ou bien $y, z > x$ et de même $|f(y) - f(z)| \leq \varepsilon$.

   (b) Pour tout $x \in [a,b]$, on note $\delta_x > 0$ comme dans la question précédente. On note $r > 0$ comme dans le lemme de Lebesgue (pour ces δ_x). On considère maintenant $\tau = (v_\ell)_{\ell \in [\![0,N]\!]}$ une subdivision régulière de $[a,b]$, de pas strictement inférieur à r.
   Soit $\ell \in [\![0, N-1]\!]$. Par construction de r, on peut trouver $x_\ell \in [a,b]$ tel que $|y - v_\ell| < r \implies |y - x_\ell| < \delta_{x_\ell}$. En particulier, comme le pas σ est strictement inférieur à r, tous les $y \in]v_\ell, v_{\ell+1}[$ vérifient $|y - x_\ell| < \delta_{x_\ell}$. Et donc, par définition de δ_{x_ℓ} si $y, z \in]v_\ell, v_{\ell+1}[$ sont du même côté de x_ℓ, alors $|f(y) - f(z)| \leq \varepsilon$.
   On considère alors la subdivision σ obtenue en ajoutant aux v_ℓ les x_ℓ. Par construction, deux points y, z sur un même intervalle ouvert délimité par deux points de cette subdivision sont
   - Dans un $]v_\ell, v_{\ell+1}[$;
   - Du même côté de x_ℓ.

   Deux tels points y et z vérifient donc $|f(y) - f(z)|$, ce qui conclut.

   (c) On considère σ une subdivision comme précédemment. Sur chaque intervalle $]u_k, u_{k+1}[$, on choisit une valeur arbitraire f_k prise par f (par exemple $f\Big(\dfrac{u_k + u_{k+1}}{2}\Big)$. On définit alors h en demandant que
   - $\forall k \in [\![0, N]\!]$, $h(u_k) = f(u_k)$;

- $\forall k \in [\![0, N-1]\!], \forall y \in]u_k, u_{k+1}[, h(y) = f_k$.

Alors, h est une fonction en escalier sur $[a,b]$. De plus, $|f(y) - h(y)|$ est nul si y est un point de la subdivision et vaut $|f(y) - f_k|$ sinon. Cette quantité est inférieure à ε car $f(y)$ et f_k sont deux valeurs de f sur un même intervalle $]u_k, u_{k+1}[$. Ainsi, $\|f - h\|_\infty \leq \varepsilon$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on peut alors trouver f_n en escalier telle que $\|f_n - f\|_\infty \leq \frac{1}{n}$. La suite (f_n) converge donc vers f en norme infinie, ce qui conclut.

4. **Exemples.**

   (a) Soit f une fonction continue par morceaux, soit $\sigma = (u_k)$ une subdivision de $[a,b]$ adaptée à f. Par définition, f est continue en tous les $x \in [a,b]$, qui ne sont pas des u_k. De plus, en un u_k, f a une limite à gauche (sauf si $u_k = a$) (c'est équivalent à dire que la restriction $f_{|]u_k,u_{k+1}[}$ admet un prolongement continu en u_{k+1}) et une limite à droite (sauf si $u_k = b$) (même argument).
   Par la caractérisation précédente, f est réglée.
   On peut aussi procéder comme dans le cours et construire explicitement une suite de fonctions en escalier en adaptant la preuve donnée pour les fonctions continues aux fonctions continues par morceaux ; attention à bien définir la bonne valeur en les points de la subdivision.

   (b) Par le théorème de la limite monotone, une fonction monotone admet une limite à gauche et à droite en tout point (en excluant la borne de gauche pour la limite à gauche et la borne de droite pour la limite à droite). Ces limites sont finies car comprises entre $f(a)$ et $f(b)$. Donc, les fonctions monotones sont réglées.

   (c) On peut prendre $r_n = \frac{1}{n}$ puis définir f par $f(0) = 0$, $f(x) = \frac{1}{n}$ si $x \in \left]\frac{1}{2n+1}, \frac{1}{2n}\right[$ et $f(x) = -\frac{1}{n}$ si $x \in \left]\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n-1}\right[$.
   C'est une fonction réglée. En effet, elle est manifestement en escalier sur tout intervalle $[a,1]$, avec $a > 0$ (donc admet limite à gauche et à droite en tout point de $]0,1]$) et on montre qu'elle admet une limite nulle en 0.
   Remarquons qu'elle n'est pas en escalier sur $[0,1]$ *puisqu'elle a une infinité de discontinuités sur ce segment.*

2.2 Fonctions Riemann-intégrables

5. Soit f une fonction non majorée. Alors, $\mathscr{E}^+(f)$ est vide et donc $I^+(f)$ vaut conventionnellement $+\infty$. Comme $I^-(f)$ vaut $-\infty$ ou un réel, $I^-(f) \neq I^+(f)$; donc f n'est pas Riemann-intégrable. Argument analogue si f n'est pas minorée.

6. Soit f une fonction réglée. Soit $\varepsilon > 0$. On peut trouver h en escalier telle que $\|f - h\|_\infty \leq \varepsilon$. On a donc $h - \varepsilon \leq f \leq h + \varepsilon$. Ceci montre déjà que $\mathscr{E}^+(f)$ et $\mathscr{E}^-(f)$ sont non vides, puis que $\int_a^b h - \varepsilon(b-a) \leq I^-(f)$ et $I^+(f) \leq \int_a^b h + \varepsilon(b-a)$. On a donc $I^+(f) - I^-(f) \leq 2\varepsilon(b-a)$. Comme on a toujours $I^+(f) - I^-(f) \geq 0$ (car si h_1 et h_2 sont en escalier et vérifient $h_1 \leq f \leq h_2$, alors $\int_a^b h_1 \leq \int_a^b h_2$, par propriété de croissance de l'intégrale), on a :

$$\forall \varepsilon > 0, 0 \leq I^+(f) - I^-(f) \leq 2\varepsilon(b-a).$$

Ceci montre que $I^+(f) = I^-(f)$. Donc f est Riemann-intégrable. De plus, les inégalités précédentes montrent que $|I(f) - \int_a^b h| \leq \varepsilon(b-a)$ si h en escalier est telle que $\|f-h\|_\infty$. On peut alors prendre une suite de fonctions en escalier (f_n) convergeant vers f en norme infinie. Un passage à la limite dans l'inégalité $|I(f) - \int_a^b f_n| \leq \|f - f_n\|_\infty(b-a)$ montre que $I(f) = \lim_n \int_a^b f_n$. Donc, les deux notions d'intégrale coïncident.

7. On a vu en cours que f n'a pas de limite (à droite) en 0. Donc, f n'est pas réglée.
Soit $\varepsilon > 0$. Fixons $\delta \in]0,1[$. La restriction de f à $[\delta, 1]$ est continue, donc il existe (f_n) en escalier convergeant uniformément vers f sur $[\delta,1]$. En particulier, on peut trouver un entier N tel que sur $[\delta,1]$, $\|f - f_N\|_\infty \leq \varepsilon$.
On note h^+ la fonction en escalier valant 1 sur $[0,\delta[$ et $f_N + \varepsilon$ sur $[\delta,1]$. De même, on note h^- la fonction valant -1 sur $[0,\delta[$ et $h-\varepsilon$ sur $[\delta,1]$. On a donc $h^- \leq f \leq h^+$. De plus,
$$I(h^-) = -\delta + \int_\delta^1 f_N \geq -\delta + \int_\delta^1 f - \varepsilon \text{ et de même } I(h^+) \leq \delta + \int_\delta^1 f + \varepsilon.$$
On utilise une relation de Chasles et le fait que $\left|\int_\delta^1 f_N - \int_\delta^1 f\right| \leq \varepsilon$. On a donc
$$-\delta - \varepsilon + \int_\delta^1 f \leq I^-(f) \leq I^+(f) \leq \delta + \varepsilon + \int_\delta^1 f.$$
Comme c'est vrai pour tout $\varepsilon > 0$, on a
$$-\delta + \int_\delta^1 f \leq I^-(f) \leq I^+(f) \leq \delta + \int_\delta^1 f.$$
En particulier, $0 \leq I^+(f) - I^-(f) \leq 2\delta$. Comme δ est quelconque, $I^-(f) = I^+(f)$ est f est Riemann-intégrable. On a donc
$$I(f) - \delta \leq \int_\delta^1 f \leq I(f) + \delta.$$
Ceci montre que $\lim_{\delta\to 0^+} \int_\delta^1 f$ existe et vaut $I(f) = \int_0^1 f$.

8. Soit h une fonction en escalier sur $[0,1]$ tel que $h \geq \mathbb{1}_\mathbb{Q}$. Soit $\sigma = (u_k)$ une subdivision adaptée. Tout intervalle ouvert $]u_k, u_{k+1}[$ contient un rationnel q et $\mathbb{1}_\mathbb{Q}(q) = 1$. Donc, la valeur de h sur $]u_k, u_{k+1}[$ est supérieure à 1. On en déduit que $\int_0^1 h \geq 1$. Par définition de $I^+(f)$, on a donc, $I^+(f) \geq 1$.
De même, si k en escalier est telle que $k \leq \mathbb{1}_\mathbb{Q}$, on a $\int_0^1 k \leq 0$ car tout intervalle ouvert contient un irrationnel et que $\mathbb{1}_\mathbb{Q}$ s'annule en un irrationnel. On a donc $I^-(f) \leq 0$.
Ainsi, $I^+(f) \neq I^-(f)$: f n'est pas Riemann-intégrable.

9. Commençons par un lemme : Si h en escalier sur $[a,b]$ a r discontinuités et vérifie $|h| \leq M$, si $(\sigma, \underline{t})$ est une subdivision pointée, alors $\left|S(h,\sigma,\underline{t}) - \int_a^b h\right| \leq 2rM\delta(\sigma)$.

En effet, notons $\sigma = (u_k)_{k\in[\![0,N]\!]}$. On a $S(h,\sigma,\underline{t}) = \sum_{k=0}^{N-1} h(t_k)(u_{k+1}-u_k)$ et $\int_a^b h = \sum_{k=0}^{N-1}\int_{u_k}^{u_{k+1}} h$. Donc,

$$S(h,\sigma,\underline{t}) - \int_a^b h = \sum_{k=0}^{N-1}\int_{u_k}^{u_{k+1}} \big(h(t_k)-h\big).$$

Si h n'a pas de discontinuité sur $[u_k,u_{k+1}]$, alors h vaut $h(t_k)$ sur ce segment et donc le terme dans la somme précédente est nulle. Comme h a r discontinuités, au plus r termes sont donc non nuls. Comme $|h|\leq M$, on a $|h(t_k)-h|\leq 2M$ par inégalité triangulaire , d'où $\left|\int_{u_k}^{u_{k+1}}\big(h(t_k)-h\big)\right| \leq 2M(u_{k+1}-u_k)\leq 2M\delta(\sigma)$. Donc, par inégalité triangulaire :

$$\left|S(h,\sigma,\underline{t}) - \int_a^b h\right| \leq 2rM\delta(\sigma).$$

(i) $\Longrightarrow$ (ii). Soit maintenant f une fonction Riemann-intégrable ; on note $I = \int_a^b f$. On fixe $\varepsilon > 0$. Par définition, on peut trouver h et k en escalier telles que $h\leq f\leq k$ et

$$I - \frac{\varepsilon}{2} \leq \int_a^b h \leq I \leq \int_a^b k \leq I + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Notons $r(h)$ et $r(k)$ le nombre de discontinuités de h et k ; notons $M(h)$ et $M(k)$ des majorants de $|h|$ et $|k|$. On définit $\delta > 0$ par $\delta = \max\left(\frac{\varepsilon}{4r(h)M(h)+1}, \frac{\varepsilon}{4r(k)M(k)+1}\right)$. Avec le lemme précédent, si $(\sigma,\underline{t})$ est une subdivision pointée de pas $\delta(\sigma)\leq\delta$, on a :

$$\left|S(h,\sigma,\underline{t}) - \int_a^b h\right| \leq \frac{\varepsilon}{2} \text{ et } \left|S(k,\sigma,\underline{t}) - \int_a^b k\right| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

On déduit de ces inégalités que

$$I - \varepsilon \leq S(h,\sigma,\underline{t}) \leq I \leq S(k,\sigma,\underline{t}) \leq I+\varepsilon.$$

Par ailelurs, comme $h\leq f\leq k$, on a de plus $S(h,\sigma,\underline{t})\leq S(f,\sigma,\underline{t})\leq S(k,\sigma,\underline{t})$. On en déduit que $\left|I - S(f,\sigma,\underline{t})\right|\leq\varepsilon$, ce qui conclut.

(ii) $\Longrightarrow$ (i). Montrons déjà que si f vérifie (ii), alors f est bornée. On fixe $\varepsilon = 1$ et une subdivision régulière $\sigma = (u_k)_{k\in[\![0,N]\!]}$ de pas $\delta(\sigma)$ inférieur au δ correspondant. En définissant $t_k = u_k$ si $k\neq k_0$ et $t_k = x\in[u_k,u_{k+1}]$ (avec x quelconque) si $k = k_0$, on a

$$S(f,\sigma,\underline{t}) = \delta(\sigma)\Big(\sum_{k\neq k_0} f(u_k) + f(x)\Big).$$

Comme $|S(f,\sigma,\underline{t})|\leq I+1$, on en déduit une majoration de $|f(x)|$ en fonction de $\delta(\sigma)$ et des $f(u_k)$ (en nombre fini). Comme k_0 est quelconque et que x est quelconque dans $[u_k,u_{k+1}]$, on obtient ainsi une majoration de $|f|$.

Fixons alors $\varepsilon > 0$. On considère un δ correspondant à ε dans (ii) et une subdivision régulière $\sigma = (u_k)_{k\in[\![0,N]\!]}$ de pas $\delta(\sigma)\leq\delta$. Pour tout $k\in[\![0,N-1]\!]$, on note $t_k\in[u_k,u_{k+1}]$ un point tel que $f(t_k)\leq \inf_{[u_k,u_{k+1}]} f + \frac{\varepsilon}{b-a}$ (l'infimum est bien défini car f est minorée). La fonction h en escalier valant $f(t_k) - \frac{\varepsilon}{b-a}$ sur $[u_k,u_{k+1}]$ vérifie donc $h\leq f$. De plus, $\int_a^b h = S(f,\sigma,\underline{t}) - \varepsilon$. On en déduit que $I^-(f) \geq S(f,\sigma,\underline{t})-\varepsilon$. Comme $\left|S(f,\sigma,\underline{t})-I\right| \leq \varepsilon$, on en déduit que $I^-(f) \geq I-2\varepsilon$. De même, on montre que $I^+(f) \leq I+2\varepsilon$. Comme ε est quelconque, on en déduit que $I^-(f) = I^+(f) = I$. Donc, que f est Riemann-intégrable et $\displaystyle\int_a^b f = I$.

2.3 Fonctions KH-intégrables

10. Si f est Riemann-intégrable, on prend δ_0 comme dans le point (ii) de la condition de Riemann-intégrabilité. On définit alors une jauge δ comme la fonction constante δ_0. Alors, une subdivision pointée $(\sigma,\underline{t})$ est δ-fine ssi $\delta(\sigma) \leq \delta_0$. On en déduit que f est KH-intégrable et que les deux valeurs de I dans les définitions coïncident.

11. Comme f n'est pas bornée sur $[0,1]$, elle n'est pas Riemann-intégrable.
Pour montrer la KH-intégrabilité et calculer l'intégrale, on peut utiliser le lemme écrit au début de la question 13.(a). Soit $\varepsilon > 0$. On définit une jauge δ sur $[0,1]$ par $\delta(x)$ comme dans le lemme si $x > 0$ et $\delta(0) = \varepsilon$. On adapte la démonstration du théorème fondamental (cf. question 13.(a)) ; la singularité en 0 ne va modifier l'argument que de ε. Au final, on trouve (détails laissés au lecteur), que f est KH-intégrable et que son intégrale coïncide avec $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = 2$.

12. Soit $\varepsilon > 0$. On énumère les éléments de $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ en une suite $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On définit une jauge δ sur $[0,1]$ par $\delta(x) = 1$ si $x \notin \mathbb{Q}$ et $\delta(q_n) = \dfrac{\varepsilon}{2^{n+1}}$. Considérons une subdivision pointée $(\sigma,\underline{t})$, δ-fine. On a :
$$0 \leq S(f,\sigma,\underline{t}) = \sum_{k=0}^{N-1} f(t_k)(u_{k+1}-u_k) \leq \sum_{k=0}^{N-1} f(t_k)\delta(t_k).$$
Les termes de cette somme sont non nuls ssi t_k est l'un des q_n. Notons I l'ensemble des indices k tels que $t_k \in \mathbb{Q}$. On a donc :
$$0 \leq S(f,\sigma,\underline{t}) = \varepsilon\sum_{i\in I} 2^{-n_i+1} \leq \varepsilon\sum_{n\in\mathbb{N}} 2^{-n+1} = \varepsilon.$$
Ceci montre que f est KH-intégrable et que son intégrale est nulle.

13. **Théorème fondamental de l'analyse.**

    (a) On commence par un lemme. Si f est une fonction dérivable en x (avec x intérieur à $[a,b]$), si $\varepsilon > 0$, on peut trouver $\delta > 0$ tel que si $0 < h+k < \delta$, alors $\left|f'(x)-\dfrac{f(x+k)-f(x-h)}{h+k}\right| \leq \varepsilon$.
    En effet,
$$\begin{aligned}\left|f'(x)-\frac{f(x+k)-f(x-h)}{h+k}\right| &= \left|\frac{kf'(x)+f(x)-f(x+k)}{h+k}-\frac{hf'(x)+f(x)-f(x-h)}{h+k}\right|\\ &\leq \left|\frac{kf'(x)+f(x)-f(x+k)}{k}\right|+\left|\frac{hf'(x)+f(x)-f(x+h)}{h}\right|\\ &\leq \left|f'(x)-\frac{f(x+k)-f(x)}{k}\right|+\left|f'(x)-\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right|.\end{aligned}$$
    Les deux termes de cette somme tendent vers 0 quand h et k tendent vers 0 par définition de $f'(x)$. Il existe donc $\delta > 0$ tels que ces deux termes soient inférieurs à $\varepsilon/2$ si $h+k \leq \delta$.

Ceci conclut le lemme.

Soit f dérivable, soit $\varepsilon > 0$. Pour tout $x \in [a, b]$, on note $\delta_x > 0$ un réel comme dans le lemme précédent (pour $x = a$ ou $x = b$, on adapte en prenant h ou k égal à 0 dans le lemme). Soit $(\sigma, \underline{t})$ une subdivision de $[a, b]$, qu'on suppose δ-fine. On a :

$$S(f', \sigma, \underline{t}) = \sum_{k=0}^{N-1} f'(t_k)(u_{k+1} - u_k).$$

Par hypothèse, $u_{k+1} - u_k \leq \delta_{t_k}$. 0n a donc :

$$\left| f'(t_k) - \frac{f(u_{k+1}) - f(u_k)}{u_{k+1} - u_k} \right| \leq \varepsilon.$$

Donc, par inégalité triangulaire :

$$\left| S(f', \sigma, \underline{t}) - \sum_{k=0}^{N-1} f(u_{k+1}) - f(u_k) \right| \leq \sum_{k=0}^{N-1} \varepsilon(u_{k+1} - u_k) = \varepsilon(b - a).$$

La somme à gauche vaut $f(b) - f(a)$. Comme ε est quelconque, on en déduit que f' est KH-intégrable et que $\displaystyle\int_a^b f' = f(b) - f(a)$.

(b) La fonction $f : x \longmapsto x^2 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right)$ (prolongée par $f(0) = 0$) est dérivable sur $[0, 1]$ (on a $f(x) = o(x)$ en 0 ce qui montre que f est dérivable en 0, avec $f'(0) = 0$).
Sa dérivée n'est pas bornée sur $[0, 1]$, donc n'est pas Riemann-intégrable.