Intégration

1 Généralités

EXERCICE 1. ♣ – ◐○○ *Condition de périodicité*
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue, soit $T > 0$.
Montrer que f est T-périodique ssi la fonction $g : t \mapsto \int_t^{t+T} f(u)du$ est constante.

EXERCICE 2. ♣/♢ – ●○○ *Égalité de la moyenne*

1. Soit $f \in \mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que $\frac{1}{b-a}\int_a^b f = f(c)$.

2. Soient $f, g \in \mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$, avec $g \geq 0$. Montrer qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que $\int_a^b fg = f(c)\int_a^b g$.

EXERCICE 3. ♢ – ●◐○ *Limites de $\frac{1}{x}\int_0^x f$ en 0^+ et $+\infty$*
Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$.

1. Déterminer la limite de $\frac{1}{x}\int_0^x f$ quand $x \to 0^+$.

2. On suppose que $\lim_{+\infty} f = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Montrer que $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\int_0^x f = \ell$.

EXERCICE 4. ●◐○ *Annulation des premiers moments*
Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que, pour tout $k \in [\![0,n]\!]$: $\int_a^b t^k f(t)dt = 0$.
Montrer que f s'annule au moins $n+1$ fois sur $]a,b[$.

EXERCICE 5. ♣/♢ – ●●○ *Lemme de Riemann-Lebesgue*
Soit f une fonction définie sur $[a,b]$. Montrer que $\lim_{\omega\to+\infty}\int_a^b f(t)\sin(\omega t)dt = 0$ quand

1. f est de classe $\mathscr{C}^1$;

2. f est une fonction en escalier ;

3. f est continue par morceaux.

EXERCICE 6. ♣ – ●●○ *Un calcul de $\zeta(2)$*

1. Déterminer deux réels α et β tels que $\forall n \geq 1$, $\int_0^\pi (\alpha t + \beta t^2)\cos(nt)dt = \frac{1}{n^2}$.

2. En utilisant le lemme de Riemann-Lebesgue, en déduire la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$.

EXERCICE 7. ●●○ *Annulation de coefficients de Fourier*
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et 2π-périodique telle que, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(kt)\,dt = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(kt)\,dt = 0.$$

Montrer que f admet au moins $2n+2$ zéros distincts sur $[0, 2\pi[$.

EXERCICE 8. ♣/♢ – ●●○ *Limite de* $\|f\|_p$
Soit f une fonction continue sur un segment $[a, b]$. Montrer que

$$\lim_{p\to+\infty} \left(\int_a^b |f|^p\right)^{1/p} = ||f||_\infty.$$

2 Suites et fonctions définies par des intégrales

EXERCICE 9. ♣ – ●○○ $\displaystyle\int_0^1 \ln(1+t^n)\,dt$
On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \displaystyle\int_0^1 \ln(1+t^n)\,dt$.

1. Montrer que (u_n) est à termes positifs et est décroissante.
2. Montrer que (u_n) tend vers 0 en comparant $\ln(1+x)$ et x.
3. Retrouver le résultat de la question précédente en découpant l'intégrale en une intégrale sur les segments $[0, 1-\delta]$ et $[1-\delta, 1]$, où $\delta > 0$.

EXERCICE 10. ●○○ $\displaystyle\int_x^{2x} \frac{e^t}{t}\,dt$
Soit $\phi : x \mapsto \displaystyle\int_x^{2x} \frac{e^t}{t}\,dt$.

1. Montrer que ϕ est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}^*$.
2. Calculer les limites à gauche et à droite de ϕ en 0.
3. Montrer que ϕ est prolongeable par continuité en 0. Étudier la dérivabilité de ce prolongement.
4. Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} \frac{\phi(x)}{x} = +\infty$.

EXERCICE 11. ●◐○ $\displaystyle\int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t}$
Soit $F(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\ln t}$, définie pour $x \in]0, 1[\cup]1, +\infty[$.

1. Montrer que F se prolonge par continuité en 0 et en 1.
2. Montrer que F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}^+$.
3. Montrer que F est convexe et tracer sa courbe représentative.
4. Donner un développement limité à l'ordre 3 en 1 de F.

EXERCICE 12. ♣ – ●◐○ *Intégrale de Poisson*
On définit pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ l'intégrale de Poisson

$$I(x) = \int_0^{\pi} \ln(1 - 2x\cos t + x^2)\,dt.$$

1. Décomposer en produits d'irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ les polynômes $X^{2n} - 1$.

2. En déduire la valeur de $I(x)$.

EXERCICE 13. ●◐○ $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^1 f(t^n)\,dt$

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Déterminer la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^1 f(t^n)\,dt$.

EXERCICE 14. ●●○ $\lim\limits_{h\to 0^+} \int_h^{ah} \frac{f(t)}{t}\,dt$

Soient $a > 0$ et $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ continue. Déterminer la valeur de $\lim\limits_{h\to 0^+} \int_h^{ah} \frac{f(t)}{t}\,dt$.

EXERCICE 15. ♣/♢ – ●●◐ *Une suite d'intégrales imbriquées*
Soit f une fonction continue sur $[0,1]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $J_n(f) = \int_0^1 \cdots \int_0^1 f(\sqrt[n]{x_1 \dots x_n})\,dx_1 \dots dx_n$.
Montrer que $\big(J_n(f)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel à préciser.

3 Inégalités intégrales

EXERCICE 16. ♣/♢ – ●◐○ *Quand la dérivée borne l'intégrale*
Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f(a) = f(b) = 0$. Montrer que

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \frac{(b-a)^2}{4} \|f'\|_\infty.$$

EXERCICE 17. ●◐○ *Cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire*
Soit f une fonction continue de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$.

1. Donner une condition nécessaire et suffisante sur f pour qu'on ait l'égalité

$$\left| \int_a^b f(t)\,dt \right| = \int_a^b |f(t)|\,dt.$$

2. Même question si f est à valeurs complexes.

EXERCICE 18. ●◐○ *Inégalité de Young*
Soit $f : [0, a] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ telle que $f(0) = 0$ et $f'(x) > 0$ pour tout x de $[0, a]$.

1. Montrer que pour tout réel $x \in [0, a]$:
$$\int_0^x f(t)dt + \int_0^{f(x)} f^{-1}(u)du = xf(x).$$

2. En déduire que pour tous réels x de $[0, a]$ et y de $[0, f(a)]$:
$$xy \le \int_0^x f(t)dt + \int_0^y f^{-1}(u)du.$$

3. Cas d'égalité ?

EXERCICE 19. ♣ – ●◐○ *Deux applications de Cauchy-Schwarz*

1. Soient $f, g : [0, 1] \to \mathbb{R}_+$ continues telles que $fg \ge 1$. Montrer que $\left(\int_0^1 f\right)\left(\int_0^1 g\right) \ge 1$.

2. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et $E = \left\{f \in \mathscr{C}^1\left([0, 1], \mathbb{R}\right) \mid f(0) = a, f(1) = b\right\}$. Déterminer $\inf\limits_{f\in E} \int_0^1 (f')^2$.
Cette borne est-elle atteinte ? Interprétation physique ?

EXERCICE 20. ♣ – ●●○ *Inégalité de Poincaré*
Soit $f \in \mathscr{C}^1\left([0, 1], \mathbb{R}\right)$ telles que $f(0) = 0$. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 f(t)^2 dt \le \frac{1}{2}\int_0^1 f'(t)^2 dt$.

EXERCICE 21. ♣/♢ – ●●○ *Lemme de Gronwall*
Soient $u, v \in \mathscr{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$. On suppose qu'il existe $C \ge 0$ tel que $\forall t \ge 0, u(t) \le C + \displaystyle\int_0^t uv$.
Montrer que $\forall t \ge 0, u(t) \le C \exp\left(\displaystyle\int_0^t v\right)$.

EXERCICE 22. ♣ – ●●◐ *Deux inégalités intégrales avec f^2 et f'^2*

1. Montrer que $\forall \varepsilon > 0, \exists C > 0, \forall f \in \mathscr{C}^1\left([a, b]\right), \forall x \in [a, b], \left|f(x)^2 - f(a)^2\right| \le C\displaystyle\int_a^b f^2 + \varepsilon\int_a^b f'^2$.

2. Montrer que $\forall \varepsilon > 0, \exists D > 0, \forall f \in \mathscr{C}^1\left([a, b]\right), \left\|f^2\right\|_\infty \le D\displaystyle\int_a^b f^2 + \varepsilon\int_a^b f'^2$.

4 Formules de Taylor

EXERCICE 23. ◐○○ *Encadrement fin de la fonction sinus*
Montrer que pour tout $x \in [0, \pi/2]$: $x - \dfrac{x^3}{6} \le \sin x \le x - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{120}$.

EXERCICE 24. ●○○ *Développements en série entière de* cos *et* sin

Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\sin x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}$ et $\cos x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}$.

EXERCICE 25. ♣/♢ – ●●○ *Inégalité de Kolmogorov*

Soit $f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que $|f|$ est bornée par M_0 et $|f''|$ est bornée par M_2.
Montrer que $|f'|$ est bornée par $\sqrt{2M_0M_2}$.

EXERCICE 26. ♣ – ●●○ *Prolongement* $\mathscr{C}^\infty$ *de* $\frac{f(x)}{x}$

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ telle que $f(0) = 0$. Soit $g : x \mapsto \frac{f(x)}{x}$.

1. Montrer que g est prolongeable par continuité en 0.
2. Calculer la dérivée n-ième de g sur $\mathbb{R}^*$ puis, en reconnaissant une formule de Taylor, l'exprimer sous la forme d'une intégrale.
3. À l'aide d'une intégration par parties, calculer $\lim_{x\to 0} g^{(n)}(x)$.
4. En déduire que g est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

5 Sommes de Riemann

EXERCICE 27. ●○○ *Équivalent de* $\sum_{k=1}^{n} k^\alpha$

Soit $\alpha > 0$. En utilisant une somme de Riemann, démontrer l'équivalent $\sum_{k=1}^{n} k^\alpha \sim \frac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1}$.

EXERCICE 28. ●◐○ *Sommes de Riemann*

Calculer les limites quand $n \to +\infty$ de

1. $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$
2. $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{n}{n^2+k^2}$
3. $\frac{1}{n^3} \sum_{k=0}^{n-1} k^2 \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$
4. $\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{n}{k^2}$
5. $\frac{1}{n} \sqrt[n]{(n+1)(n+2)\dots(2n)}$

EXERCICE 29. ●◐○ *Sommes de Riemann doubles*

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue.

1. Déterminer la limite de $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*} = \left(\frac{1}{n^2} \sum_{1\leq k,\ell\leq n} f\left(\frac{k}{n}\right) f\left(\frac{\ell}{n}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Déterminer la limite de $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*} = \left(\frac{1}{n^2} \sum_{1\leq k\leq\ell\leq n} f\left(\frac{k}{n}\right) f\left(\frac{\ell}{n}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

EXERCICE 30. ♣/♢ – ●●○ *Intégrales généralisées ?*

Déterminer les limites des suites de terme général $A_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n^2-k^2}}$ et $B_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k}{n}\right)$.

EXERCICE 31. ●●○ *Développements asymptotiques et sommes de Riemann*

1. Soit f de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$. Déterminer α tel que $\int_0^1 f - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.
2. Soit f de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[0,1]$. Déterminer α et β tels que $\int_0^1 f - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{\alpha}{n} + \frac{\beta}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.
3. En déduire un développement asymptotique à trois termes de $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n^2}{(n+k)^2}$.

Indications

Exercice 2. Par le TAF ou en utilisant la propriété de croissance de l'intégrale.

Exercice 3. Pour la limite en 0, utiliser le théorème d'intégrale des DL. Pour la limite en $+\infty$, raisonner par analogie avec le théorème de Cesàaro.

Exercice 5. Pour 2., se ramener par linéarité aux fonctions indicatrices d'intervalles. Pour 3., approcher une fonction continue par morceaux par des fonctions en escalier.

Exercice 8. Faire un dessin et se convaincre que seul ce qui se passe en un point où $|f|$ atteint son maximum va compter.

Exercice 15. On pourra commencer par le cas où f est polynomiale.

Exercice 16. Exprimer f comme l'intégrale de sa dérivée. Un peu d'astuce permet d'utiliser les deux hypothèses $f(a) = 0$ et $f(b) = 0$.

Exercice 21. On pourra considérer la fonction $t \mapsto u(t)\exp\left(-\int_0^t v\right)$

Exercice 25. On appliquera les inégalités de Taylor-Lagrange entre $x-h$ et x d'une part et x et $x+h$ d'autre part, pour un h bien choisi.

Exercice 30. Le théorème sur les sommes de Riemann s'applique pour des fonctions continues sur un segment. Pour contourner la difficulté, préférer une comparaison série-intégrale.