23 - Intégration sur un segment

Jeremy Daniel

1 Intégrale des fonctions en escalier

Soient $a < b \in \mathbb{R}$. Les fonctions considérées sont définies sur $[a, b]$ et à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1.1 Fonctions en escalier

Définition 1.1 (Subdivision)
Une subdivision σ du segment $[a, b]$ est une suite finie $\sigma = (u_k)_{k \in [\![0,n]\!]}$ telle que

$$a = u_0 < u_1 < \cdots < u_n = b.$$

Le pas de σ, noté $\delta(\sigma)$, est l'écart maximal pris entre deux points de la subdivision :

$$\delta(\sigma) = \max\{u_{k+1} - u_k \mid k \in [\![0, n-1]\!]\}.$$

Définition 1.2 (Subdivision régulière)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit une subdivision $\sigma = (u_k)_{k \in [\![0,n]\!]}$ de $[a, b]$ par $u_k = a + k\dfrac{b-a}{n}$.
On parle de subdivision régulière. Son pas est $\dfrac{b-a}{n}$.

Définition 1.3 (Fonctions en escalier)
Une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{K}$ est en escalier s'il existe une subdivision $\sigma = (u_k)_{k \in [\![0,n]\!]}$ de $[a, b]$ telle que f est constante sur chaque intervalle $]u_k, u_{k+1}[$, pour $k \in [\![0, n-1]\!]$.

Remarque 1.4
Une telle subdivision est dite adaptée à f.

Notation 1.5
On note $\mathcal{E}\big([a, b], \mathbb{K}\big)$ l'ensemble des fonctions en escalier à valeurs dans $\mathbb{K}$ sur $[a, b]$.

Remarque 1.6
Si une subdivision $\sigma = (u_k)$ est adaptée à une fonction f en escalier, les valeurs de f prises en u_k peuvent être arbitraires.

Exemples 1.7

- Une fonction constante sur $[a, b]$ est une fonction en escalier sur $[a, b]$.
- Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = 1$ si $x = \dfrac{a+b}{2}$ et 0 sinon. C'est une fonction en escalier. Si σ_n est la subdivision régulière de pas $\dfrac{b-a}{n}$, σ_n est adaptée à f si, et seulement si n est pair.
- La restriction à $[a, b]$ de la fonction partie entière est en escalier. On peut prendre comme subdivision adaptée la suite croissante formée de a, b et des entiers appartenant à $[a, b]$.

Lemme 1.8
Soient f et g deux fonctions en escalier.
Il existe une subdivision adaptée à la fois à f et à g.

Corollaire 1.9
L'ensemble $\mathcal{E}\big([a, b], \mathbb{K}\big)$ est un sous-espace vectoriel et un sous-anneau de $\mathcal{F}\big([a, b], \mathbb{K}\big)$.

Proposition 1.10
$\mathcal{E}([a, b], \mathbb{K})$ est le sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}([a, b], \mathbb{K})$ engendré par les fonctions caractéristiques des segments :

$$\mathcal{E}\big([a, b], \mathbb{R}\big) = \mathrm{Vect}(\chi_{[c,d]} \mid a \leq c \leq d \leq b\}.$$

Attention !
Il faut inclure les fonctions caractéristiques des segments réduits à un point.

1.2 Intégrale des fonctions en escalier

Définition 1.11 (Intégrale des fonctions en escalier)
Soit f une fonction en escalier sur $[a, b]$. Soit $\sigma = (u_k)_{k=0}^n$ une subdivision adaptée à f. L'intégrale de f, notée $\displaystyle\int_a^b f$ est définie par $\displaystyle\int_a^b f = \sum_{k=0}^{n-1} f_k(u_{k+1} - u_k)$, où f_k est la valeur prise par f sur $]u_k, u_{k+1}[$.

Remarque 1.12
Il vaut vérifier que cette quantité ne dépend pas de la subdivision adaptée à f qu'on a choisie.

Remarque 1.13
Quand $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, cette définition est conforme à l'interprétation de l'intégrale comme aire (algébrique) délimitée par la courbe représentative de f.

Proposition 1.14 (Inégalité triangulaire)
Soit f une fonction en escalier sur $[a,b]$. Alors, $|f|$ est aussi en escalier et $\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f|$.

Proposition 1.15 (Linéarité)
L'application $I : \mathcal{E}\big([a,b],\mathbb{K}\big) \to \mathbb{K}$ *définie par* $I(f) = \int_a^b f$ *est une forme linéaire sur* $\mathcal{E}\big([a,b],\mathbb{K}\big)$.

Remarque 1.16
C'est l'unique forme linéaire L sur $\mathcal{E}\big([a,b],\mathbb{K}\big)$ telle que $L(\chi_{[c,d]}) = d - c$, pour tous $c \leq d$.

Proposition 1.17 (Positivité et croissance)
Soient f et g deux fonctions en escalier sur $[a,b]$, à valeurs réelles.
- *Si $f \geq 0$, alors* $\int_a^b f \geq 0$.
- *Si $f \leq g$, alors* $\int_a^b f \leq \int_a^b g$.

Proposition 1.18 (Relation de Chasles)
Soit c un point de $]a,b[$ et soit f une fonction en escalier sur $[a,b]$. Alors les restrictions de f à $[a,c]$ et $[c,b]$ sont en escalier et

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

2 Intégrale des fonctions continues par morceaux

2.1 Norme infinie sur l'ensemble des fonctions continues

Définition 2.1 (Norme infinie)
Soit f une fonction bornée sur $[a,b]$. La norme infinie (ou norme uniforme) de f est le réel, noté $\|f\|_\infty$, défini par $\|f\|_\infty = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|$.

Remarque 2.2
$\|f\|_\infty$ est bien définie si f (et donc $|f|$) est continue car elle est alors bornée sur le segment $[a,b]$. De plus, on sait qu'il existe dans ce cas un réel $x_0 \in [a,b]$ tel que $\|f\|_\infty = |f(x_0)|$.

Définition 2.3 (Convergence en norme infinie)
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonction bornées sur $[a,b]$. Soit f une fonction bornée sur $[a,b]$. On dit que la suite (f_n) converge vers f en norme infinie (ou converge uniformément vers f) si $\|f_n - f\|_\infty$ tend vers 0 quand $n \to +\infty$.

Remarque 2.4
C'est équivalent à la formule suivante :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \forall x \in [a, b] : |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

La fonction f_n se rapproche donc uniformément de la fonction f.

Théorème 2.5 (Approximation uniforme par les fonctions en escalier)
Soit f une fonction continue sur $[a, b]$. Il existe une suite $(f_n)_n$ de fonctions en escalier sur $[a, b]$ telle que (f_n) converge vers f en norme infinie.

Remarque 2.6
Le résultat suivant est un autre résultat d'approximation uniforme, cette fois par des polynômes. Il est hors programme et n'est pas utilisé dans la suite du chapitre.

Théorème 2.7 (Weierstrass - HP)
Soit f une fonction continue sur $[a, b]$. Il existe une suite $(f_n)_n$ d'application polynomiales sur $[a, b]$ telle que (f_n) converge vers f en norme infinie.

2.2 Intégrale des fonctions continues par morceaux

Définition 2.8 (Fonction continue par morceaux sur un segment)
Une fonction f définie sur $[a, b]$ est continue par morceaux s'il existe une subdivision $\sigma = (u_k)_{k \in [\![0,n]\!]}$ de $[a, b]$ telle que, pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, la restriction $f_{]u_k, u_{k+1}[}$ est continue et admet un prolongement par continuité au segment $[u_k, u_{k+1}]$.
Une telle subdivision est dite adaptée à f.

Remarque 2.9
Autrement dit, on demande que $f_{]u_k, u_{k+1}[}$ admet une limite finie à gauche en u_k et une limite finie à droite en u_{k+1}. Les valeurs de f en les points u_k de la subdivision peuvent être arbitraires.

Définition 2.10 (Fonction continue par morceaux)
Si I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et si $f : I \to \mathbb{R}$ est une fonction, on dit que f est continue par morceaux si la restriction de f à tout segment contenu dans I est une fonction continue par morceaux sur ce segment.

Exemples 2.11
- Une fonction en escalier sur un segment $[a, b]$ est une fonction continue par morceaux sur $[a, b]$.
- La fonction f définie de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ par $f(x) = 1/x$ si $x > 0$ et $f(0) = 0$ n'est pas une fonction continue par morceaux : elle n'admet pas de limite à gauche en 0.

- La fonction $g : x \mapsto \lfloor \frac{1}{x} \rfloor$, définie sur $\mathbb{R}_+^*$ est continue par morceaux. En effet, toute restriction de g à un segment $[a,b]$ contenu dans $\mathbb{R}_+^*$ est une fonction en escalier.

Proposition 2.12
Une fonction continue par morceaux sur $[a,b]$ a un nombre fini de points de discontinuités et est bornée.

Notation 2.13
On note $\mathcal{CM}\big([a,b],\mathbb{K}\big)$ l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur $[a,b]$. C'est un sous-espace vectoriel et un sous-anneau de $\mathcal{F}\big([a,b],\mathbb{K}\big)$.

Théorème 2.14 (Approximation uniforme des fonctions continues par morceaux)
Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a,b]$. Il existe une suite $(f_n)_n$ de fonctions en escalier sur $[a,b]$ telle que (f_n) converge vers f en norme infinie.

Lemme 2.15
Soient $(f_n)_n$ et $(g_n)_n$ deux suites de fonctions en escalier sur $[a,b]$. On suppose que les deux suites convergent en norme infinie vers une même fonction bornée f. Alors les deux suites $\left(\int_a^b f_n\right)_n$ et $\left(\int_a^b g_n\right)_n$ sont convergentes et ont la même limite.

Définition 2.16 (Intégrale d'une fonction continue par morceaux)
Soit f une fonction continue par morceaux sur le segment $[a,b]$. On considère $(f_n)_n$ une suite de fonctions en escalier sur $[a,b]$ qui converge vers f en norme infinie.
L'intégrale de f sur $[a,b]$, notée $\int_a^b f$, est la limite $\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n$.

Définition 2.17 (Moyenne d'une fonction)
Soit $f \in \mathcal{CM}\big([a,b],\mathbb{K}\big)$. La moyenne de f est le nombre $\frac{1}{b-a}\int_a^b f$.

2.3 Propriétés

Proposition 2.18
On a les propriétés suivantes usuelles de l'intégration :
- ***Inégalité triangulaire :*** *Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a,b]$. Alors, $|f|$ est aussi continue par morceaux et $\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f|$.*
- ***Linéarité :*** *L'application $I : \mathcal{CM}\big([a,b],\mathbb{K}\big)$ définie par $I(f) = \int_a^b f$ est une forme linéaire sur $\mathcal{CM}\big([a,b],\mathbb{K}\big)$.*

- ***Positivité et croissance :*** *Soient f et g deux fonctions continues par morceaux sur $[a,b]$, à valeurs réelles.*
  - *Si $f \geq 0$, alors $\displaystyle\int_a^b f \geq 0$.*
  - *Si $f \leq g$, alors $\displaystyle\int_a^b f \leq \int_a^b g$.*
- ***Relation de Chasles :*** *Soit c un point de $]a,b[$ et soit f une fonction continue par morceaux sur $[a,b]$. Alors les restrictions de f à $[a,c]$ et $[c,b]$ sont continues par morceaux et*
$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

Proposition 2.19 (Stricte positivité de l'intégrale)
Soit f une fonction continue et positive sur un segment $[a,b]$.
Alors, $\displaystyle\int_a^b f = 0$ si, et seulement si f est nulle.

Attention !
Cette propriété est fausse pour les fonctions continues par morceaux : penser à la fonction indicatrice du singleton $\{0\}$ sur $[0,1]$.

Proposition 2.20 (Intégrale des fonctions à valeurs complexes)
Soit f une fonction définie sur $[a,b]$ et à valeurs complexes. On note $u = \mathrm{Re} f$ et $v = \mathrm{Im}\, f$.
- *f est continue par morceaux ssi u et v sont continues par morceaux.*
- $\displaystyle\int_a^b f = \int_a^b u + i\int_a^b v.$
- $\displaystyle\int_a^b \overline{f} = \overline{\int_a^b f}.$

Proposition 2.21
L'application $B : \mathcal{CM}\big([a,b],\mathbb{R}\big) \times \mathcal{CM}\big([a,b],\mathbb{R}\big) \to \mathbb{R}$ définie par $B(f,g) = \displaystyle\int_a^b fg$ est une application bilinéaire symétrique positive ; c'est-à-dire que pour toutes fonctions f, f_2, g, g_2 dans $\mathcal{CM}\big([a,b],\mathbb{R}\big)$ et tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$:
- $B(f,f) \geq 0$;
- $B(f,g) = B(g,f)$;
- $B(\lambda f + \mu f_2, g) = \lambda B(f,g) + \mu B(f_2,g)$;
- $B(f, \lambda g + \mu g_2) = \lambda B(f,g) + \mu B(f,g_2)$.

Remarque 2.22
La restriction de B à $\mathcal{C}\big([a,b],\mathbb{R}\big) \times \mathcal{C}\big([a,b],\mathbb{R}\big)$ est définie positive : on a $B(f,f) > 0$ si $f \in \mathcal{C}\big([a,b],\mathbb{R}\big) - \{0\}$. On dira que B définit un produit scalaire sur $\mathcal{C}\big([a,b],\mathbb{R}\big)$.

Corollaire 2.23 (Inégalité de Cauchy-Schwarz)
Soient $f, g \in \mathcal{CM}\big([a,b],\mathbb{R}\big)$*. On a* $\displaystyle\Big(\int_a^b fg\Big)^2 \leq \int_a^b f^2 \times \int_a^b g^2.$

Corollaire 2.24 (Cas d'égalité pour les fonctions continues)
Soient $f, g \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$.
On a l'égalité $\displaystyle\Big(\int_a^b fg\Big)^2 = \int_a^b f^2 \times \int_a^b g^2$ *ssi* f *et* g *sont colinéaires.*

Définition 2.25 (Notation $\displaystyle\int_a^b f$ généralisée)
On généralise la notation $\displaystyle\int_a^b f$ aux cas où $a \geq b$:

- Si $a > b$ et si f est continue sur le segment $[b,a]$, on définit $\displaystyle\int_a^b f = -\int_b^a f$.
- Si $a = b$, on définit $\displaystyle\int_a^b f = 0$.

Attention !
Telles qu'elles ont été énoncées, l'inégalité triangulaire, la positivité et la croissance de l'intégrale ne sont vraies que pour $a < b$. Dans le doute, on commencera par se ramener à une intégrale dont les bornes sont écrites dans le bon sens.

Proposition 2.26 (Relation de Chasles généralisée)
Soit I *un intervalle, soit* f *une fonction continue par morceaux sur* I *et soient* a, b, c *trois points de* I*. Alors,* $\displaystyle\int_a^b f + \int_b^c f = \int_a^c f$.

Notation 2.27
Dans les calculs, on utilisera aussi très souvent la notation *infinitésimale* $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$, où on peut remplacer la variable muette x par n'importe quel autre symbole.

2.4 Théorème fondamental de l'analyse

Théorème 2.28 (Théorème fondamental de l'analyse)
Soit f *une fonction continue sur un intervalle* I *et à valeurs dans* $\mathbb{K}$*. Soit* $a \in I$*. La fonction* F*, définie sur* I *par* $\displaystyle F(x) = \int_a^x f$ *est de classe* $\mathcal{C}^1$*. C'est l'unique fonction dérivable sur* I *telle que* $F' = f$ *et* $F(a) = 0$.

Corollaire 2.29
Soit f *une fonction continue sur un intervalle* I*. Soient* $a, b \in I$*. Alors, toute primitive* F

de f vérifie la relation $\int_a^b f = F(b) - F(a)$.

Corollaire 2.30 (Définition du logarithme)
Il existe une unique fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$, définie sur $\mathbb{R}_+^*$, telle que $\ln(1) = 0$ *et*

$$\forall x > 0, \ln'(x) = \frac{1}{x}.$$

Corollaire 2.31 (Dérivée d'une intégrale avec bornes variables)
Soit f une fonction continue sur un intervalle I, à valeurs dans $\mathbb{K}$. Soit J un intervalle de $\mathbb{R}$ et soient α et β deux fonctions dérivables de J dans I. La fonction G définie sur J, par

$$G : x \mapsto \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f$$

est dérivable et sa dérivée est donnée par

$$\forall x \in J, G'(x) = \beta'(x) f\big(\beta(x)\big) - \alpha'(x) f\big(\alpha(x)\big).$$

Proposition 2.32 (Inégalité des accroissements finis, cas complexe)
Soit $f : I \to \mathbb{C}$ une application continue de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose que $|f'|$ est majorée par une constante M. Alors $\forall x, y \in I : |f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$.

Remarque 2.33
L'inégalité est vraie si f est seulement supposée continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$, comme on l'a montré dans le chapitre *Dérivation* (y compris pour les fonctions à valeurs complexes).

2.5 Calcul intégral

Théorème 2.34 (Intégration par parties)
Soient u et v deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ définies sur un intervalle I et à valeurs dans $\mathbb{K}$. Alors, pour tous $a, b \in I$:

$$\int_a^b u'v = [u(t)v(t)]_{t=a}^{t=b} - \int_a^b uv'.$$

Théorème 2.35 (Formule du changement de variable)
Soient I et J deux intervalles. Soit f une fonction définie sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$. Soit $u : J \to I$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. Alors, pour tous $a, b \in J$:

$$\int_{u(a)}^{u(b)} f(x)dx = \int_a^b f\big((u(t)\big)u'(t)dt.$$

Remarque 2.36
Ce changement de variable ne requiert pas la bijectivité de u.

Remarque 2.37
On renvoie au chapitre *Calcul Intégral* pour les aspects les plus pratiques ; ainsi qu'au chapitre *Fractions rationnelles* pour le calcul des intégrales de fonctions rationnelles.

3 Formules de Taylor

Dans la suite, I est un intervalle de $\mathbb{R}$.

3.1 Formule de Taylor avec reste intégral

Remarque 3.1
On rappelle la formule de **Taylor-Young**. Soient f une fonction de I dans $\mathbb{K}$ et a un point de I. Si f est dérivable n fois en a, alors f admet un développement limité d'ordre n en a, donné par :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o((x-a)^n),$$

au voisinage de a. Cette formule ne donne qu'une information locale sur f, au sens où si on considère un point $b \neq a$ dans I, la formule ne donne pas d'informations sur $f(b)$.

Attention !
Si f est de classe $\mathcal{C}^\infty$, on n'a pas toujours $f(x) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$.

La série $\sum \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$ n'est pas convergente en général et, même quand il y a convergence, l'égalité peut ne pas avoir lieu.

Théorème 3.2 (Formule de Taylor avec reste intégral)
Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur I, à valeurs dans $\mathbb{K}$. Soit $a \in I$.
Alors, pour tout $x \in I$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + R_n(x),$$

où le reste intégral *$R_n(x)$ vaut $R_n(x) = \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt$.*

Remarques 3.3
- La formule de Taylor avec reste intégral est une formule *globale* : elle donne la valeur de f en tout point de l'intervalle, à partir des premières dérivées de f en a et de la dérivée $(n+1)$-ème.

- C'est aussi une formule *exacte* : elle donne une égalité et non une inégalité.
- Pour $n = 0$, on retrouve $f(x) = f(a) + \displaystyle\int_a^x f'(t)dt$.
- La formule de Taylor-Young s'en déduit en montrant que $R_n(x) = o\big((x-a)^n\big)$, au voisinage de a. Cependant, les hypothèses sur f sont plus fortes (classe $\mathcal{C}^{n+1}$ au lieu de n fois dérivable, avec $f^{(n)}$ dérivable en a).

3.2 Inégalité de Taylor-Lagrange

Théorème 3.4 (Inégalité de Taylor-Lagrange)
Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur I, à valeurs dans $\mathbb{K}$. Soit $a \in I$. Alors, pour tout $x \in I$:

$$\Big|f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k\Big| \leq \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!} M_{n+1},$$

avec $M_{n+1} = \sup\limits_{[a,x]} |f^{(n+1)}|$.

Remarques 3.5
- C'est encore une formule globale, mais elle donne seulement une inégalité.
- Pour $n = 0$, on retrouve $|f(x) - f(a)| \leq |x-a| \sup\limits_{[a,x]} |f'|$, qui est l'inégalité des accroissements finis.
- De même qu'il existe une égalité des accroissements finis, il existe aussi – pour les fonctions à valeurs réelles – une égalité de Taylor-Lagrange à l'ordre n.

Exercice 3.6
Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$.

4 Sommes de Riemann

Définition 4.1 (Somme de Riemann à gauche)
Soit $f \in \mathcal{CM}\big([a,b], \mathbb{K}\big)$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on appelle somme de Riemann (à gauche) d'ordre n associée à f la somme :

$$S_n(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right).$$

Remarque 4.2
On peut aussi définir la somme de Riemann d'ordre n à droite d'ordre n associée à f :

$$S'_n(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right).$$

Théorème 4.3

Si $f \in \mathcal{CM}\big([a,b],\mathbb{K}\big)$, *les suites* $\big(S_n(f)\big)_n$ *et* $\big(S'_n(f)\big)_n$ *convergent vers* $\displaystyle\int_a^b f$.

Remarque 4.4

La démonstration est plus simple si f est M-lipschitzienne pour un $M > 0$. On a alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \left| S_n(f) - \int_a^b f \right| \leq M \frac{(b-a)^2}{2n}.$$

Exemple 4.5

Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{n^2 - k^2}$