

Semaine 22 - Révisions d'algèbre linéaire, d'intégration - Représentation matricielle

1 Révisions d'algèbre linéaire

En axant sur le calcul matriciel

2 Révisions d'intégration

cf. programme de colles précédent

3 Représentation matricielle dans des bases quelconques

- Matrice d'un vecteur, d'une famille de vecteurs dans une base
- Matrice d'une application linéaire dans des bases
- Compatibilité des représentations
- *Via* des bases, isomorphisme $\mathcal{L}(E, F) \cong \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$; cas particulier des endomorphismes : $\mathcal{L}(E) \cong \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est aussi un isomorphisme d'anneaux
- Vecteur propre, valeur propre ; la matrice d'un endomorphisme dans une base \mathbf{e} est diagonale ssi \mathbf{e} est formée de vecteurs propres de l'endomorphisme
- Sous-espace stable par un endomorphisme ; la matrice d'un endomorphisme dans une base $\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_n)$ est triangulaire supérieure ssi chaque $F_k = \text{Vect}(e_1, \dots, e_k)$ est stable par l'endomorphisme

4 Changement de base

- Matrice de changement de base, interprétation en termes d'*ancienne* et de *nouvelle* bases
- $P_{\mathbf{e}'}^{\mathbf{e}} = \text{Mat}_{\mathbf{e}', \mathbf{e}}(\text{id}_E)$.
- Inverse d'une matrice de changement de base
- Changement de base pour un vecteur
- Changement de base pour une application linéaire
- Changement de base pour un endomorphisme (même base au départ et à l'arrivée)
- Matrices équivalentes ; caractérisation par calcul matriciel ou représentation d'applications linéaires
- Le rang d'une matrice est égal au rang de toute application linéaire qu'elle représente.

- Deux matrices sont équivalentes ssi elles ont même rang ; toute matrice de rang r est équivalente à J_r

Sera traité lundi.

- Une matrice a même rang que sa transposée
- Matrices semblables ; caractérisation par calcul matriciel ou représentation d'endomorphismes
- Trace d'une matrice ; propriétés ; trace d'un endomorphisme
- La trace d'un projecteur est égale à son rang

5 Compléments (sera traité mercredi)

- Écriture par blocs d'une matrice, interprétation des matrices diagonales par blocs, produit par blocs
- Compléments sur le rang :
 - $\text{rg}(AB) \leq \min(\text{rg } A, \text{rg } B)$ (HP)
 - $|\text{rg } A - \text{rg } B| \leq \text{rg}(A + B) \leq \text{rg}(A) + \text{rg}(B)$ (HP)

6 Questions de cours

- Calcul de noyau, d'image, de rang d'une matrice
- Révisions d'algèbre linéaire (dimension finie / calcul matriciel)
- Un endomorphisme en dimension n a au plus n valeurs propres
- Toute matrice de rang r est équivalente à J_r
- Calculs utilisant une matrice de changement de base