19 - Algèbre linéaire, représentation matricielle

Jeremy Daniel

Les parties 1 et 2 sont des rappels des chapitres précédents.

On désigne par $\mathbb{K}$ un corps quelconque. Les lettres n, p, q désignent des entiers naturels.

1 L'espace vectoriel $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

Proposition 1.1 (L'ensemble des matrices, comme espace vectoriel)
L'ensemble $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, muni de l'addition et de la multiplication externe est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Proposition 1.2 (Base et dimension de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$)
La famille $(E_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq p}}$, formée par les matrices élémentaires $E_{i,j} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est une base de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. En particulier, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est de dimension np.

Définition 1.3 (Base canonique de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$)
La base $(E_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq p}}$ est la base canonique de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Remarque 1.4
Les coefficients $a_{i,j}$ d'une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ sont les coordonnées de A par rapport à la base canonique.

Proposition 1.5 (Bilinéarité du produit matriciel)
Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. Les applications

$$\phi_A : \left\{ \begin{array}{cl} \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}) & \to \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K}) \\ M & \mapsto AM \end{array} \right. \quad et \quad \psi_B : \left\{ \begin{array}{cl} \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) & \to \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K}) \\ M & \mapsto MB \end{array} \right.$$

sont linéaires.

Proposition 1.6 (Sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$)
Les parties $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$, $\mathcal{T}_n(\mathbb{K})$, $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont des ssev de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$:
- *$\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ a pour base la famille $(E_{i,i})_{1\leq i\leq n}$ et est de dimension n ;*
- *$\mathcal{T}_n(\mathbb{K})$ a pour base la famille $(E_{i,j})_{1\leq i\leq j\leq n}$ et est de dimension $\dfrac{n(n+1)}{2}$;*

- $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ *a pour base la famille* $(E_{i,j} - E_{j,i})_{1\leq i<j\leq n}$ *et est de dimension* $\dfrac{n(n-1)}{2}$ *;*
- $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ *a pour base la famille formée des* $E_{i,j} + E_{j,i}$*, pour* $1 \leq i < j \leq n$*, et des* $E_{i,i}$*, pour* $1 \leq i \leq n$*. Il a dimension* $\dfrac{n(n+1)}{2}$.

Remarque 1.7
On suppose que $\operatorname{car} \mathbb{K} \neq 2$ pour les résultats sur les matrices symétriques et anti-symétriques.

Théorème 1.8 (La transposition est une symétrie de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$)
On suppose $\operatorname{car} \mathbb{K} \neq 2$*. La transposition* $\Phi : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), A \mapsto A^T$ *est une symétrie. De plus,*

$$\operatorname{Ker}(\Phi - \operatorname{Id}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{K}) \text{ et } \operatorname{Ker}(\Phi + \operatorname{Id}) = \mathcal{A}_n(\mathbb{K}).$$

Remarque 1.9
En particulier, si $\operatorname{car} \mathbb{K} \neq 2$, $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

2 Matrices et applications linéaires dans $\mathbb{K}^n$

2.1 Application linéaire associée à une matrice

Remarque 2.1
On peut identifier les $\mathbb{K}$-espaces vectoriels $\mathbb{K}^n$ et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, en associant à $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ la matrice colonne $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Cette identification sera souvent implicite dans la suite.

Définition 2.2 (Application linéaire associée à une matrice)
Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. L'application linéaire canoniquement associée à A est $f : \mathbb{K}^p \to \mathbb{K}^n$, correspondant au produit matriciel $X \mapsto AX$, de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

Remarque 2.3
Si $A = (a_{i,j})$, f est donc définie par

$$f(x_1, \ldots, x_p) = \Big(\sum_{j=1}^{p} a_{i,j} x_j \Big)_{1\leq i\leq n}.$$

Si pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, on note e_i le i-ème élément de la base canonique de $\mathbb{K}^p$ et C_i la i-ème colonne de A (vue comme vecteur de $\mathbb{K}^n$, on a pour tout i : $A(e_i) = C_i$.

Proposition 2.4 (Isomorphisme $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \cong \mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$)
Pour tout $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on note $f_A : \mathbb{K}^p \to \mathbb{K}^n$ l'application linéaire associée. Alors,

$$\Phi : \begin{cases} \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) & \to \mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n) \\ A & \mapsto f_A \end{cases}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Exercice 2.5
On considère $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par

$$\phi(x, y) = (2x + 3y, 5x - 7y, 9x + 2y).$$

Écrire la matrice $M \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{K})$ associée à ϕ.

Proposition 2.6 (Compatibilité avec le produit)
Si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, on a avec les notations précédentes :

$$f_{AB} = f_A \circ f_B \text{ dans } \mathcal{L}(\mathbb{K}^q, \mathbb{K}^n).$$

Corollaire 2.7 (Cas des matrices carrées)
L'application Φ précédente de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels et d'anneaux. Elle induit un isomorphisme de groupes $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \cong \mathrm{GL}(\mathbb{K}^n)$.

2.2 Noyau, image et rang

Définition 2.8 (Noyau, image et rang d'une matrice)
Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

- Le noyau de A, noté $\operatorname{Ker} A$, est le noyau de l'application linéaire associée à A. C'est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^p$.
- L'image de A, noté $\operatorname{Im} A$, est l'image de l'application linéaire associée à A. C'est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$.
- Le rang de A, noté $\operatorname{rg} A$, est le rang de l'application linéaire associée.

Théorème 2.9 (Conditions d'inversibilité pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$)
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

1. *A est inversible ;*
2. *A est inversible à droite : il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que $AB = I_n$;*
3. *A est inversible à gauche : il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que $BA = I_n$;*
4. $\operatorname{Im} A = \mathbb{K}^n$;
5. $\operatorname{Ker} A = \{0\}$.

Corollaire 2.10 (Systèmes de Cramer)
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. *A est inversible ;*
2. *Le système linéaire $AX = 0$ a comme unique solution $X = 0$;*
3. *Il existe $B \in \mathbb{K}^n$ pour lequel le système $AX = B$ a une unique solution.*

Proposition 2.11 (L'image est engendrée par les colonnes)
Notons $C_1, \ldots, C_p \in \mathbb{K}^n$ les colonnes de A. Alors, $\operatorname{Im} A = \operatorname{Vect}(C_1, \ldots, C_p)$.

Remarque 2.12
Une ligne de A appartient à $\mathcal{M}_{1,p}(\mathbb{K})$ et correspond donc à une forme linéaire sur $\mathbb{K}^p$.

Proposition 2.13 (Le noyau, comme solution d'un système linéaire)
Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On note $\ell_1, \ldots, \ell_n$ les formes linéaires sur $\mathbb{K}^p$ associées aux lignes $L_1, \ldots, L_n$ de A. Alors, $\operatorname{Ker} A = \displaystyle\bigcap_{i=1}^{n} \operatorname{Ker}(l_i)$.

2.3 Calculs pratiques

Lemme 2.14 (Noyau de PA et image de AQ)
Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, soient $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, $Q \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$.

$$\operatorname{Ker}(PA) = \operatorname{Ker} A \text{ et } \operatorname{Im}(AQ) = \operatorname{Im} A.$$

Remarque 2.15
On a défini précédemment les opérations élémentaires sur les lignes d'une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et vu qu'elles correspondaient à multiplier A à gauche par une matrice de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. On peut de même définir les opérations élémentaires sur les colonnes ; elles correspondent à multiplier A à droite par une matrice de $\mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$.

Corollaire 2.16 (Noyau, image et opérations élémentaires)
Soit $A \in \mathcal{M}(n,p)(\mathbb{K})$.
- *Le noyau de A est inchangé si on modifie A par des opérations élémentaires sur les lignes.*
- *L'image de A est inchangée si on modifie A par des opérations élémentaires sur les colonnes.*

Définition 2.17 (Matrice échelonnée en colonnes)
Une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est échelonnée en colonnes si $A^T \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ est échelonnée en lignes.

Remarque 2.18
On rappelle que l'algorithme du pivot de Gauss permet de transformer une matrice A en une matrice échelonnée en lignes, par des opérations élémentaires sur les lignes. De

même, il permet de transformer une matrice A en une matrice échelonnée en colonnes, par opérations élémentaires sur les colonnes.

Proposition 2.19 (Image d'une matrice échelonnée en colonnes)
Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ échelonnée en colonnes. On note $C_1, \dots, C_k$ les colonnes non nulles de A. Alors, $(C_1, \dots, C_k)$ est une base de $\operatorname{Im} A$.

Proposition 2.20 (Noyau d'une matrice échelonnée en lignes)
Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ échelonnée en lignes. On note $L_1, \dots, L_k$ les lignes non nulles de A, et $\ell_1, \dots, \ell_k$ les formes linéaires sur $\mathbb{K}^p$ correspondantes. Alors, $(\ell_1, \dots, \ell_k)$ est une famille libre dans $(\mathbb{K}^p)^*$ et $\operatorname{Ker} A = \bigcap_{i=1}^{k} \operatorname{Ker}(\ell_i)$.

Remarque 2.21
Notons $(\operatorname{Ker} A)^o = \{\ell \in (\mathbb{K}^p)^* \mid \ell_{|\mathbb{K}^p} = 0\}$ l'annulateur de $\operatorname{Ker} A$ dans $(\mathbb{K}^p)^*$. Alors, $(\ell_1, \dots, \ell_k)$ est une base de $(\operatorname{Ker} A)^o$. Ainsi, les deux énoncés sont plus symétriques.

Corollaire 2.22 (Rang d'une matrice échelonnée)
Si une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est échelonnée en colonnes ou en lignes, son rang est égal au nombre de colonnes/nombres de lignes non nulles.

Méthode 2.23 (Calcul de l'image)
Pour calculer l'image d'une matrice A, on échelonne A en colonnes. Les colonnes non nulles forment alors une base de $\operatorname{Im} A$.

Exercice 2.24
Calcul de l'image de $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Méthode 2.25 (Calcul du noyau)
Pour calculer le noyau d'une matrice A, on échelonne A en lignes. Les lignes non nulles forment un système d'équations linéaires *minimal* pour le noyau de A. Si on souhaite plutôt une base de $\operatorname{Ker} A$, on finit la résolution du système linéaire.

Exercice 2.26
Calcul du noyau de $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Méthode 2.27 (Calcul du rang)
Pour calculer le rang d'une matrice A, on l'échelonne en lignes ou en colonnes et on compte le nombres de lignes/colonnes non nulles.

3 Matrice de vecteurs et d'applications linéaires

On désigne par E et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie.

3.1 Représentation matricielle

Définition 3.1 (Matrice d'un vecteur)
Soit $\mathbf{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E, et soit x un élément de E. La matrice de x dans la base $\mathbf{e}$, notée $\mathrm{Mat}_{\mathbf{e}}(x)$ est la matrice colonne dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, dont les coefficients sont les coordonnées de x dans la base $\mathbf{e}$:

$$\text{Si } x = x_1e_1 + x_2e_2 + \cdots + x_ne_n, \text{ alors } \mathrm{Mat}_{\mathbf{e}}(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Exercice 3.2
On considère $E = \mathbb{R}^2$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Soit u_θ et v_θ dans $\mathbb{R}^2$ définis par $u_\theta = (\cos\theta, \sin\theta)$ et $v_\theta = (-\sin\theta, \cos\theta)$.

a) Montrer que la famille $\mathbf{e}_\theta = (u_\theta, v_\theta)$ est une base de $\mathbb{R}^2$.
b) Écrire $\mathrm{Mat}_{\mathbf{e}_\theta}(x)$, avec $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.

Définition 3.3 (Matrice d'une famille de vecteurs)
Soit $\mathbf{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E, et soit $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_p)$ une famille d'éléments de E. La matrice de $\mathbf{u}$ dans la base $\mathbf{e}$, notée $\mathrm{Mat}_{\mathbf{e}}(\mathbf{u})$ ou $\mathrm{Mat}_{\mathbf{e}}(u_1, \ldots, u_p)$ est la matrice $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dont les colonnes sont les matrices $\mathrm{Mat}_{\mathbf{e}}(u_i)$:

$$\text{Si } \forall i \in [\![1, p]\!] : u_j = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}e_i, \text{ alors}$$

$$\mathrm{Mat}_{\mathbf{e}}(u_1, \ldots, u_p) = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix}$$

Définition 3.4 (Matrice d'une application linéaire)
Soient $\mathbf{e} = (e_1, \ldots, e_p)$ une base de E et $\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_n)$ une base de F. Soit $f : E \to F$ une application linéaire. La matrice de f dans les bases $\mathbf{e}$ et $\mathbf{f}$, notée $\mathrm{Mat}_{\mathbf{e},\mathbf{f}}(f)$ est la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathbf{f}}\big(f(e_1), \ldots, f(e_p)\big)$.

Méthode 3.5
Pour écrire la matrice de f dans les bases $\mathbf{e}$ et $\mathbf{f}$, on doit donc :

– Considérer les éléments de la base $\mathbf{e}$ de E.
– Calculer les images de ces éléments par f

- Écrire ces images dans la base $\mathbf{f}$ de F.

Exercice 3.6
Dans $E = F = \mathbb{R}^2$, on considère π la projection sur l'axe des abscisses par rapport à l'axe des ordonnées. Écrire $\mathrm{Mat}_{\mathbf{e},\mathbf{f}}(\pi)$ dans les cas suivants :
- $\mathbf{e} = \mathbf{f}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^2$.
- $\mathbf{e}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^2$, $\mathbf{f} = \big((1,1),(1,-1)\big)$.
- $\mathbf{e} = \mathbf{f}$ est la base $\big((1,1),(1,-1)\big)$.

Proposition 3.7 (Compatibilité des représentations matricielles, application et vecteur)
Soit $f : E \to F$ une application linéaire, $\boldsymbol{e}$ et $\boldsymbol{f}$ des bases de E et F, x un élément de E. Alors, $\mathrm{Mat}_{\boldsymbol{e},\boldsymbol{f}}(f)\,\mathrm{Mat}_{\boldsymbol{e}}(x) = \mathrm{Mat}_{\boldsymbol{f}}\big(f(x)\big)$.

Remarques 3.8 (Cas particuliers)
- Si $E = F$, on prend le plus souvent la même base $\mathbf{e}$ au départ et à l'arrivée pour représenter $f : E \to F$. On écrit alors $\mathrm{Mat}_{\mathbf{e}}(f)$, au lieu de $\mathrm{Mat}_{\mathbf{e},\mathbf{e}}(f)$.
- Si $F = \mathbb{K}$, c'est-à-dire si f est une forme linéaire, on prend comme base $\mathbf{f}$ la famille formée du seul élément $1 \in \mathbb{K}$. On omet cette base de la notation et on écrit simplement $\mathrm{Mat}_{\mathbf{e}}(f)$. On a donc
$$\mathrm{Mat}_{\mathbf{e}}(f) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_p \end{pmatrix}$$
si $\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_p)$ et si $f(e_i) = x_i$.

3.2 Propriétés de compatibilité

Proposition 3.9 (Isomorphisme $\mathcal{L}(E,F) \cong \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, *via* des bases)
Soient $\boldsymbol{e} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E, $\boldsymbol{f} = (f_1, \dots, f_n)$ une base de F. L'application $\Phi_{\boldsymbol{e},\boldsymbol{f}} : \mathcal{L}(E,F) \to \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, définie par
$$\Phi_{\boldsymbol{e},\boldsymbol{f}}(f) = \mathrm{Mat}_{\boldsymbol{e},\boldsymbol{f}}(f)$$
est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Proposition 3.10 (Compatibilité avec le produit)
Soient E, F et G trois espaces vectoriels, de base respective $\boldsymbol{e}$, $\boldsymbol{f}$ et $\boldsymbol{g}$.
Si $f : E \to F$ et $g : F \to G$ sont des applications linéaires, alors
$$\mathrm{Mat}_{\boldsymbol{e},\boldsymbol{g}}(g \circ f) = \mathrm{Mat}_{\boldsymbol{f},\boldsymbol{g}}(g)\,\mathrm{Mat}_{\boldsymbol{e},\boldsymbol{f}}(f).$$

Corollaire 3.11 (Cas des matrices carrées)
Si $\boldsymbol{e} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de E, et si f et g sont des endomorphismes de E :
$$\mathrm{Mat}_{\boldsymbol{e}}(g \circ f) = \mathrm{Mat}_{\boldsymbol{e}}(g)\,\mathrm{Mat}_{\boldsymbol{e}}(f).$$

Corollaire 3.12 (Inverse)
Soient $\boldsymbol{e}$ *une base de* E*, et* $\boldsymbol{f}$ *une base de* F*, avec* $\dim E = \dim F = n$*. Soit* $f : E \to F$ *une application linéaire. Alors,* f *est bijective si, et seulement si* $\mathrm{Mat}_{\boldsymbol{e},\boldsymbol{f}}(f)$ *est inversible. Dans ce cas,*

$$\mathrm{Mat}_{\boldsymbol{f},\boldsymbol{e}}(f^{-1}) = [\mathrm{Mat}_{\boldsymbol{e},\boldsymbol{f}}(f)]^{-1}.$$

3.3 Interprétation des matrices diagonales et triangulaires.

Définition 3.13 (Vecteur propre et valeur propre - HP)
Soit f un endormorphisme de E. Un vecteur x non nul de E est un vecteur propre de f s'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $f(x) = \lambda x$.
Un tel λ est la valeur propre associée au vecteur propre x ; on dit que c'est une valeur propre de f.

Proposition 3.14 (Vecteurs propres avec valeurs propres distinctes)
Si $x_1, \ldots, x_k$ *sont des vecteurs propres de* f*, dont les valeurs propres* $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ *sont deux-à-deux distinctes, alors la famille* $(x_1, \ldots, x_k)$ *est libre.*

Corollaire 3.15 (Nombre maximal de valeurs propres)
Si f *est un endomorphisme d'un espace vectoriel* E *de dimension* n*,* f *a au plus* n *valeurs propres distinctes.*

Proposition 3.16 (Endomorphisme représenté par une matrice diagonale)
Soit $\boldsymbol{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ *une base de* E*, soit* $f : E \to E$ *un endomorphisme. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. $\mathrm{Mat}_{\boldsymbol{e}}(f)$ *est une matrice diagonale.*
2. *La base* $\mathbf{e}$ *est constituée de vecteurs propres de* f*.*

Remarque 3.17
Savoir quand une telle base de vecteurs propres existe est l'un des enjeux de la réduction des endomorphismes, enseignée en deuxième année.

Définition 3.18 (Sous-espace stable)
Soit $f : E \to E$ un endomorphisme. Un ssev F est stable par f si $f(F) \subset F$.

Proposition 3.19 (Endomorphisme représenté par une matrice triangulaire supérieure)
Soit $\mathbf{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ *une base de* E*, soit* $f : E \to E$ *un endomorphisme. Les propositions suivantes sont équivalentes :*

1. $\mathrm{Mat}_{\boldsymbol{e}}(f)$ *est triangulaire supérieure.*
2. *Pour tout* $k \in [\![1, n]\!]$*, le sous-espace vectoriel* $F_k = \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_k)$ *est stable par* f*.*

4 Changement de base

4.1 Matrices de passage

Définition 4.1 (Matrice de passage)
Soient $\mathbf{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ et $\mathbf{e'} = (e'_1, \ldots, e'_n)$ deux bases d'un même espace vectoriel E. La matrice de passage de la base $\mathbf{e}$ à la base $\mathbf{e'}$ – notée $P_{\mathbf{e}}^{\mathbf{e'}}$ est la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathbf{e}}(\mathbf{e'})$.

Remarque 4.2
On pense à $\mathbf{e}$ comme l'ancienne base et à $\mathbf{e'}$ comme la nouvelle. La matrice de passage se calcule en exprimant les vecteurs de la nouvelle base dans l'ancienne.

Lemme 4.3
Considérons l'endomorphisme $\mathrm{Id} : E \to E$. *Alors*

$$P_{\boldsymbol{e}}^{\boldsymbol{e'}} = \mathrm{Mat}_{\boldsymbol{e'},\boldsymbol{e}}(\mathrm{Id}).$$

Corollaire 4.4 (Inverse de la matrice de passage)
La matrice $P_{\boldsymbol{e}}^{\boldsymbol{e'}}$ est inversible et son inverse est $P_{\boldsymbol{e'}}^{\boldsymbol{e}}$.

Proposition 4.5 (Changement de base pour un vecteur)
Soit $x \in E$. On écrit $X = \mathrm{Mat}_{\boldsymbol{e}}(x)$, $X' = \mathrm{Mat}_{\boldsymbol{e'}}(x)$. Alors,

$$X = P_{\boldsymbol{e}}^{\boldsymbol{e'}} X'.$$

Remarque 4.6
La matrice de changement de base permet donc de calculer rapidement les coordonnées d'un vecteur dans l'ancienne base $\mathbf{e}$, à partir de celles dans la nouvelle base $\mathbf{e'}$. Si on est intéressé par l'autre sens, il faut calculer l'inverse de cette matrice.

Exercice 4.7
On considère $E = \mathbb{R}^2$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Soit $\mathbf{e}_\theta = (u_\theta, v_\theta)$ avec $u_\theta = (\cos\theta, \sin\theta)$ et $v_\theta = (-\sin\theta, \cos\theta)$. On note $\mathbf{e} = \mathbf{e}_0$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$.
  a) Calculer $P_\theta = P_{\mathbf{e}}^{\mathbf{e}_\theta}$.
  b) Calculer l'inverse de P_θ.
  c) En déduire les coordonnées de $x = (x_1, x_2)$ dans la base $\mathbf{e}_\theta$.

Proposition 4.8 (Changement de base pour une application linéaire)
On considère :
- *E et F deux espaces vectoriels de dimension finie ;*
- *$\boldsymbol{e}$ et $\boldsymbol{e'}$ deux bases de E ; on note $P = P_{\boldsymbol{e}}^{\boldsymbol{e'}}$;*
- *$\boldsymbol{f}$ et $\boldsymbol{f'}$ deux bases de F ; on note $Q = P_{\boldsymbol{f}}^{\boldsymbol{f'}}$;*
- *$f : E \to F$ une application linéaire. On note $A = \mathrm{Mat}_{\boldsymbol{e},\boldsymbol{f}}(f)$ et $A' = \mathrm{Mat}_{\boldsymbol{e'},\boldsymbol{f'}}(f)$. Alors,*

$$A' = Q^{-1}AP.$$

Corollaire 4.9 (Cas des endomorphismes)
On considère $\boldsymbol{e}$ *et* $\boldsymbol{e'}$ *deux bases de* E *et* $f : E \to E$ *un endomorphisme. On note* $A = \mathrm{Mat}_{\boldsymbol{e}}(f)$, $A' = \mathrm{Mat}_{\boldsymbol{e'}}(f)$ *et* $P = P_{\boldsymbol{e}}^{\boldsymbol{e'}}$. *Alors,*

$$A' = P^{-1}AP.$$

Remarque 4.10
En cas de doute, on aura intérêt à refaire rapidement les preuves de ces formules. Il suffit de savoir passer d'une composition d'applications linéaires à un produit matriciel, et de savoir que $P_{\mathbf{e}}^{\mathbf{e}'} = \mathrm{Mat}_{\mathbf{e}',\mathbf{e}}(\mathrm{Id}_E)$.

4.2 Matrices équivalentes

Proposition 4.11 (Caractérisation des matrices équivalentes)
Soient A *et* B *dans* $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. *Les propositions suivantes sont équivalentes :*

1. *Il existe des espaces vectoriels* E *et* F *de dimension respective* p *et* n, $\mathbf{e}$ *et* $\mathbf{e}'$ *des bases de* E, $\boldsymbol{f}$ *et* $\boldsymbol{f'}$ *des bases de* F, *et* $f : E \to F$ *une application linéaire tels que* $A = \mathrm{Mat}_{\boldsymbol{e},\boldsymbol{f}}(f)$ *et* $B = \mathrm{Mat}_{\boldsymbol{e'},\boldsymbol{f'}}(f)$.
2. *Si* $f : \mathbb{K}^p \to \mathbb{K}^n$ *est l'application linéaire canoniquement associée à* A, *il existe* $\boldsymbol{e}$ *une base de* $\mathbb{K}^p$ *et* $\boldsymbol{f}$ *une base de* $\mathbb{K}^n$ *telles que* $B = \mathrm{Mat}_{\boldsymbol{e},\boldsymbol{f}}(f)$.
3. *Il existe* $Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ *et* $P \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$ *telles que* $A = Q^{-1}BP$.

Définition 4.12 (Matrices équivalentes)
Si $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ vérifie l'une des propositions équivalentes ci-dessus, on dit que A et B sont des *matrices équivalentes.*

Proposition 4.13 (L'équivalence matricielle est une relation d'équivalence)
La relation ainsi définie sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ *est une relation d'équivalence.*

Définition 4.14 (Matrice J_r)
Soit $r \leq \min(n,p)$ un entier naturel. On définit la matrice $J_r \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ par $(J_r)_{i,j} = 1$ si $i = j \leq r$, 0 sinon.

Exemple 4.15
Dans $\mathcal{M}_{4,5}(\mathbb{K})$, $J_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Théorème 4.16 (Une matrice de rang r est équivalente à J_r)
Soit A *une matrice de* $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ *de rang* r. *Alors,* A *est équivalente à* J_r.
Ainsi, deux matrices A *et* B *de* $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ *sont équivalentes ssi elles ont même rang.*

Corollaire 4.17 (Rang de la transposée)
Une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et sa transposée $A^T \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ ont même rang.

4.3 Matrices semblables

Proposition 4.18 (Caractérisation des matrices semblables)
On considère A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Les propositions suivantes sont équivalentes :

1. *Il existe un espace vectoriel E de dimension n, $\boldsymbol{e}$ et $\boldsymbol{e}'$ des bases de E et $f : E \to E$, un endomorphisme de E tels que $A = \mathrm{Mat}_{\boldsymbol{e}}(f)$ et $B = \mathrm{Mat}_{\boldsymbol{e}'}(f)$.*
2. *Si $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ est l'application linéaire canoniquement associée à A, il existe $\boldsymbol{e}$ une base de $\mathbb{K}^n$ telle que $B = \mathrm{Mat}_{\boldsymbol{e}}(f)$.*
3. *Il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $A = P^{-1}AP$.*

Définition 4.19 (Matrices semblables)
Si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vérifie l'une des propositions équivalentes ci-dessus, on dit que A et B sont des matrices semblables.

Proposition 4.20 (La similitude matricielle est une relation d'équivalence)
La relation – dite de similitude – ainsi définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une relation d'équivalence.

Remarque 4.21
La relation de similitude est bien plus subtile que la relation d'équivalence. Comprendre quand deux matrices sont semblables est l'un des enjeux de la théorie de de la réduction des endomorphismes.

4.4 Trace d'un endomorphisme

Définition 4.22 (Trace d'une matrice)
Soit A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Sa *trace* est le scalaire $\mathrm{Tr}\, A = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{k,k}$.

Proposition 4.23 (La trace est un invariant de similitude)
Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$. En particulier, si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, $\mathrm{Tr}(P^{-1}AP) = \mathrm{Tr}\, A$: deux matrices semblables ont même trace.

Remarque 4.24
Pour que deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ soient semblables, il faut donc qu'elles aient la même trace. Ce n'est bien sûr pas une condition suffisante.

Définition 4.25 (Trace d'un endomorphisme)
Soit f un endormorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie. La trace de f – notée $\mathrm{Tr}\, f$ – est la trace de $A = \mathrm{Mat}_{\mathbf{e}}(f)$, où $\mathbf{e}$ est une base quelconque de E.

Proposition 4.26 (Trace d'un projecteur)
Soit π un projecteur de E de rang r. Alors, il existe une base $\boldsymbol{e}$ de E telle que $\mathrm{Mat}_{\boldsymbol{e}}(\pi) = J_r$. *En particulier,* $\mathrm{Tr}\,\pi = \mathrm{rg}\,\pi$.

Exercice 4.27
Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on note $\mathrm{Tr}_A : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$, l'application définie par $\mathrm{Tr}_A(M) = \mathrm{Tr}(AM)$.

1. Montrer que Tr_A est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
2. Montrer que l'application $\Phi : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \big(\mathcal{M}_n(\mathbb{K})\big)^*$, définie par $\Phi(A) = \mathrm{Tr}_A$ est un isomorphisme.

5 Compléments

5.1 Écriture par blocs des matrices

Définition 5.1 (Écriture par blocs d'une matrice)
Soit $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On se donne des indices $n_0 = 0 < n_1 < \cdots < n_k = n$ et $p_0 = 0 < p_1 < \cdots < p_\ell = p$. Pour tout $i \in [\![1, k]\!]$ et pour tout $j \in [\![1, \ell]\!]$, on considère la sous-matrice $M_{i,j} \in \mathcal{M}_{n_i - n_{i-1}, p_j - p_{j-1}}(\mathbb{K})$ dont les coefficients sont définis par

$$(M_{i,j})_{a,b} = m_{n_{i-1}+a, p_{j-1}+b}.$$

Alors, M peut s'écrire schématiquement en blocs

$$M = \begin{pmatrix} M_{1,1} & M_{1,2} & \dots & M_{1,\ell} \\ M_{2,1} & M_{2,2} & \dots & M_{2,\ell} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ M_{k,1} & M_{k,2} & \dots & M_{k,\ell} \end{pmatrix}.$$

Exemple 5.2
Dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, la matrice J_r peut s'écrire

$$J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0_{r,p-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r,p-r} \end{pmatrix}.$$

Remarque 5.3
Dans le cas particulier où $n = p$ et où on prend des indices $n_0 = 0 < n_1 < \cdots < n_k = n$, à la fois pour les indices et les colonnes, on a une écriture par blocs du type :

$$M = \begin{pmatrix} M_{1,1} & M_{1,2} & \dots & M_{1,k} \\ M_{2,1} & M_{2,2} & \dots & M_{2,k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ M_{k,1} & M_{k,2} & \dots & M_{k,k} \end{pmatrix}.$$

Définition 5.4 (Matrice diagonale par blocs)
Dans l'écriture précédente, on dit que M est écrite sous forme diagonale par blocs si les $M_{i,j}$ sont nulles pour $i \neq j$.

$$M = \begin{pmatrix} M_{1,1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & M_{2,2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & M_{k,k} \end{pmatrix}.$$

Remarque 5.5
Dans ce cas, M est diagonale, au sens habituel, ssi toutes les matrices $M_{i,i}$ sont diagonales.

Proposition 5.6 (Interprétation des matrices diagonales par blocs)
Soit E un espace vectoriel de dimension n, soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Soit $\boldsymbol{e} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Soient $0 = n_0 < n_1 < \dots < n_k = n$ des indices. Pour tout $i \in [\![1, k]\!]$, on note $E_i = \mathrm{Vect}(e_{n_{i-1}+1}, \dots, e_{n_i})$, de sorte que

$$E = E_1 \oplus E_2 \oplus \dots \oplus E_k.$$

Alors, $\mathrm{Mat}_{\boldsymbol{e}}(f)$ est une matrice diagonale par blocs (selon les indices n_i) ssi chaque sous-espace E_i est stable par f.

Remarque 5.7
Dans ce cas, l'étude de l'endomorphisme f se ramène à celle des endomorphismes induits $f_i \in \mathcal{L}(E_i)$.

Proposition 5.8 (Produit par blocs)
Soient $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $N \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, écrits par blocs :

$$M = \begin{pmatrix} M_{1,1} & M_{1,2} & \dots & M_{1,\ell} \\ M_{2,1} & M_{2,2} & \dots & M_{2,\ell} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ M_{k,1} & M_{k,2} & \dots & M_{k,\ell} \end{pmatrix} \text{ et } N = \begin{pmatrix} N_{1,1} & N_{1,2} & \dots & N_{1,m} \\ N_{2,1} & M_{2,2} & \dots & M_{2,m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ N_{\ell,1} & N_{\ell,2} & \dots & N_{\ell,m} \end{pmatrix}.$$

On suppose que, pour tous $a \in [\![1, k]\!]$,$b \in [\![1, \ell]\!]$,$c \in [\![1, m]\!]$, le nombre de colonnes de $M_{a,b}$ est égal au nombre de lignes de $N_{b,c}$. Alors,

$$MN = \begin{pmatrix} (MN)_{1,1} & (MN)_{1,2} & \dots & (MN)_{1,m} \\ (MN)_{2,1} & (MN)_{2,2} & \dots & (MN)_{2,m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (MN)_{k,1} & (MN)_{k,2} & \dots & (MN)_{k,m} \end{pmatrix},$$

où $\forall a \in [\![1, k]\!], \forall c \in [\![1, m]\!] : (MN)_{a,c} = \displaystyle\sum_{b=1}^{\ell} M_{a,b} N_{b,c}$.

EXEMPLE 5.9
Si $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix}$, le produit par blocs est possible ssi le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de A' (et si le$MN = \begin{pmatrix} AA' + BC' & AB' + BD' \\ CA' + DC' & CB' + DD' \end{pmatrix}$.

ATTENTION !
Lors d'un produit matriciel par blocs, l'ordre des facteurs est important.

5.2 Rang d'une matrice

PROPOSITION 5.10 (rang du produit - HP)
Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. On a $\operatorname{rg}(AB) \leq \min(\operatorname{rg} A, \operatorname{rg} B)$.

PROPOSITION 5.11 (rang de la somme - HP)
Soient $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On a $|\operatorname{rg} A - \operatorname{rg} B| \leq \operatorname{rg}(A + B) \leq \operatorname{rg} A + \operatorname{rg} B$.

DÉFINITION 5.12 (Matrice extraite)
Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Une matrice extraite de A est une matrice obtenue en gardant dans A les coefficients sur des lignes et colonnes fixées.

ATTENTION !
On ne demande pas que les lignes et les colonnes gardées soient consécutives. Ainsi, on peut extraire de $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$.

REMARQUE 5.13
Une matrice $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ a $\binom{n}{k} \times \binom{p}{\ell}$ matrices extraites de taille (k, ℓ).

LEMME 5.14 (Rang d'une matrice extraite)
Si $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est de rang r, une matrice extraite de M a un rang inférieur ou égal à r.

THÉORÈME 5.15 (Caractérisation du rang par matrices extraites)
Le rang de $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est le plus grand entier r tel que M admette une matrice extraite carrée de taille r inversible.

PROPOSITION 5.16
Soit $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ écrite par blocs $M = \begin{pmatrix} M_{1,1} & M_{1,2} & \dots & M_{1,l} \\ M_{2,1} & M_{2,2} & \dots & M_{2,l} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ M_{k,1} & M_{k,2} & \dots & M_{k,l} \end{pmatrix}$.

On suppose qu'il y a au plus un bloc non nul dans chaque ligne et colonne de blocs. Alors,

$$\operatorname{rg} M = \sum_{\substack{i\in[\![1,k]\!],j\in[\![1,l]\!]\\ M_{i,j}\neq 0}} \operatorname{rg} M_{i,j}.$$

Exemple 5.17

La matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ est de rang 3. En effet, en considérant le découpage en blocs $2-1-2$ sur les colonnes et $1-1-1$ sur les lignes, on a

$$\operatorname{rg} M = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} + \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 3 \end{pmatrix} + \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 4 & 5 \end{pmatrix} = 1+1+1 = 3.$$

5.3 Polynômes de matrices - HP

Définition 5.18 (Polynômes de matrices)

Soit $P = \sum_{i=0}^{d} a_i X^i \in \mathbb{K}[X]$, soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On définit $P(M) = \sum_{i=0}^{d} a_i M^i$.

Proposition 5.19

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. L'application $\Phi_M : \mathbb{K}[X] \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), P \mapsto P(M)$ est une application linéaire et un morphisme d'anneaux.

Théorème 5.20 (Noyau et image de Φ_M)

L'application Φ_M a les propriétés précédentes :

- *Son noyau est un idéal non nul de $\mathbb{K}[X]$.*
- *Son image – notée $\mathbb{K}[M]$ – est l'espace vectoriel engendré par les puissances de M. C'est un sous-anneau commutatif de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.*

Définition 5.21 (Polynôme minimal)

Le noyau de Φ_M étant un idéal, il est engendré (comme idéal) par un unique polynôme unitaire $\Pi_M \in \mathbb{K}[X]$.

Remarque 5.22

Ainsi $\Pi_M(M) = 0$, et tout polynôme P vérifiant $P(M) = 0$ est un multiple de Π_M.

Remarque 5.23

On peut montrer – théorème de Cayley-Hamilon – que π_M est de degré au plus n. En particulier, Φ_M n'est pas surjective.

Proposition 5.24 (M^{-1} est un polynôme en M)

Si $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, alors $M^{-1} \in \mathbb{K}[M]$.

Méthode 5.25 (Calcul des puissances par polynôme annulateur)
Pour calculer les puissances d'une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on cherche un polynôme P annulant M – par exemple π_M. En notant R_k le reste de X^k dans la division euclidienne par P, on a $M^k = R(M)$.

Exercice 5.26
Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.

1. Montrer que le polynôme $P = X^2 - \mathrm{Tr}(M)X + \det(M)$ annule M.
2. En déduire la valeur de M^{47}, si $M = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

Méthode 5.27 (Calcul des puissances par diagonalisation)
Supposons que $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ soit diagonalisable, c'est-à-dire semblable à une matrice diagonale D. On écrit $M = P^{-1}DP$, où $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. Alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $M^k = P^{-1}D^kP$.