

DM 17 - Théorème de Cayley-Hamilton

1 Théorème de Cayley-Hamilton

1.1 Matrice compagne

Soit $P = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$ un polynôme unitaire de degré $n \geq 1$, à coefficients dans $\mathbb{K}$. La *matrice compagne*¹ de P est la matrice $C_P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ définie par

$$C_P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

On note $\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$ et on identifie $\mathbb{K}^n$ à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

1. Déterminer, pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, la valeur de $C_P^k e_1$.
2. Montrer que $P(C_P)e_1 = 0$.
3. En déduire que, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $P(C_P)e_k = 0$, puis que $P(C_P) = 0$.
4. Montrer que P est le polynôme minimal de C_P .

1.2 Polynôme caractéristique

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On définit le *polynôme caractéristique* de A par $\chi_A(X) = \det(XI_n - A)$. Plus précisément, on note pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, $p_{i,j} = \delta_{i,j}X - a_{i,j} \in \mathbb{K}_1[X]$ et alors

$$\chi_A(X) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) p_{\sigma(1),1} \dots p_{\sigma(n),n}.$$

5. Montrer que χ_A est un polynôme unitaire de degré n .
6. Montrer que les racines de χ_A sont les valeurs propres de A .
7. En déduire que si χ_A est scindé à racines simples, alors A est semblable à une matrice diagonale. Que dire de la réciproque ?
8. Montrer que deux matrices semblables ont même polynôme caractéristique.

Si f est un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie, on peut donc définir son polynôme caractéristique χ_f , comme le polynôme caractéristique de $\text{Mat}_{\mathbf{e}}(f)$, $\mathbf{e}$ étant une base quelconque de E .

¹La terminologie *matrice compagnon* est plus usuelle, mais elle est assez curieuse.

9. Exemples :

- (a) On suppose que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est de rang r et vérifie $A^2 = A$. Déterminer χ_A .
 - (b) On suppose que $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vérifie $B^2 = I_n$ et que $\dim \text{Ker}(B - I_n) = r$. Déterminer χ_B .
10. Soit f un endomorphisme de E , soit F un sous-espace vectoriel de E stable par f . On note $f_F \in \mathcal{L}(F)$ l'endomorphisme induit par f sur F . Montrer que χ_{f_F} divise χ_f .

1.3 Théorème de Cayley-Hamilton

On propose une démonstration du théorème de Cayley²-Hamilton³ :
Si $f \in \mathcal{L}(E)$, alors $\chi_f(f) = 0$.

11. Soit P un polynôme unitaire de degré n ; on note C_P sa matrice compagne. Montrer que $P = \chi_{C_P}$. En déduire le théorème de Cayley-Hamilton pour C_P .
12. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, soit $x \in E \setminus \{0\}$. On note $E_x = \text{Vect}((f^n(x))_{n \in \mathbb{N}})$.
- (a) Montrer que E_x est stable par f et qu'il existe $r \in \mathbb{N}$ tel que $(x, f(x), \dots, f^{r-1}(x))$ est une base de E_x .
 - (b) Écrire la matrice de f_{E_x} dans cette base.
 - (c) En déduire que $\chi_{f_{E_x}}(f_{E_x}) = 0$.
13. Conclure la démonstration du théorème de Cayley-Hamilton.

²Arthur Cayley, 1821-1895

³William Hamilton, 1805-1865