Semaine 23 - Représentation matricielle, déterminants

Attention ! Dans le chapitre *Déterminants*, j'ai admis pour le moment les quelques résultats nécessaires sur le groupe symétrique (rien d'exigible là-dessus, donc). Les méthodes pratiques pour le calcul des déterminants seront vues à partir de mercredi.

1 Représentation matricielle des applications linéaires

Tout le chapitre (programme de la semaine dernière + trace + écriture par blocs + inégalités classiques sur le rang + polynômes de matrices)

2 Déterminant d'une famille de vecteurs

- Introduction : aire orientée d'un parallélogramme dans le plan
- Forme k-linéaire sur E ; elles forment un espace vectoriel
- Exemple de $(A, B) \mapsto \mathrm{Tr}(AB)$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, du produit mixte dans $\mathbb{R}^3$
- Forme k-linéaire alternée, forme k-linéaire anti-symétrique ; équivalence des deux notions (en caractéristique différente de 2) ; elles forment un espace vectoriel
- Si ϕ est k-linéaire alternée, si $x_1, \ldots, x_k$ sont des vecteurs, si σ est une permutation de $[\![1, k]\!]$, $\phi(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(k)}) = \varepsilon(\sigma)\phi(x_1, \ldots, x_k)$.
- Si E est un espace vectoriel de dimension n, l'ensemble des formes n-linéaires alternées est un espace vectoriel de dimension 1. Une telle forme ϕ est entièrement déterminée par $\phi(e_1, \ldots, e_n)$, où $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E.
- Déterminant dans une base $\mathbf{e}$. Notation $\det_{\mathbf{e}}$
- Si $\mathbf{e} = (e_1, \ldots, e_n)$, si $x_1, \ldots, x_n$ sont des vecteurs de E, si $x_j = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_{i,j} e_i$, alors

$$\det_{\mathbf{e}}(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) x_{\sigma(1),1} \ldots x_{\sigma(n),n} \big(= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) x_{1,\sigma(1)} \ldots x_{n,\sigma(n)} \big).$$

- Formule de changement de bases sur les déterminants
- Une famille de vecteurs $(x_1, \ldots, x_n)$ est une base de E ssi $\det_{\mathbf{e}}(x_1, \ldots, x_n) \neq 0$, pour une base $\mathbf{e}$ quelconque de E

3 Déterminant d'un endomorphisme, d'une matrice carrée

- Déterminant d'un endomorphisme, défini comme le nombre $\det(f)$ tel que pour toute base $\mathbf{e}$ et pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$, $\det_{\mathbf{e}}(f(x_1), \dots, f(x_n)) = \lambda \det_{\mathbf{e}}(x_1, \dots, x_n)$.
- Pour toute base $\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_n)$, $\det(f) = \det_{\mathbf{e}}(f(e_1), \dots, f(e_n))$
- f est un automorphisme ssi $\det(f) \neq 0$
- $\det(g \circ f) = \det(g)\det(f)$; $\det(\lambda f) = \lambda^n \det(f)$; $\det(f^{-1}) = \det(f)^{-1}$ si f est un automorphisme
- Déterminant d'une matrice carrée, définie comme le déterminant de la famille de ses colonnes dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$
- Si f endomorphisme de E, représenté par A dans une base $\mathbf{e}$, $\det A = \det f$
- Propriétés du déterminant matriciel (comme pour les endomorphismes) ; A est inversible ssi $\det A \neq 0$; deux matrices semblables ont même déterminant
- Formule pour $n = 2$ et $n = 3$ (règle de Sarrus)

4 Questions de cours

- Toute matrice de rang r est équivalente à J_r
- Calculs utilisant une matrice de changement de base
- Si $\dim E = n$, une forme n-linéaire alternée sur E est entièrement déterminée par sa valeur en une base $(e_1, \dots, e_n)$ (*On ne demande pas réciproquement de montrer que la formule obtenue définit une forme n-linéaire alternée*)
- Déterminant d'un endomorphisme, défini comme le nombre $\det(f)$ tel que pour toute base $\mathbf{e}$ et pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$, $\det_{\mathbf{e}}\big(f(x_1), \dots, f(x_n)\big) = \det(f)\det_{\mathbf{e}}(x_1, \dots, x_n)$. Et $\det(g \circ f) = \det(g)\det(f)$.
- Un endomorphisme en dimension n a au plus n valeurs propres (en utilisant les déterminants).