DS 7 de mathématiques

1 Exercice – Étude d'une suite récurrente

1. Pas besoin d'écrire la récurrence si on dit clairement que $[0,1]$ est un intervalle de stabilité de cos. Ceci doit être justifié brièvement.

2. Un dessin doit montrer quelque chose, sinon ça ne sert à rien. Zoom sur la zone d'intérêt ; taille raisonnable ; échelle sur les axes ; graphe propre ; au crayon de papier...

3. Ou bien en considérant les suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}), ou bien en utilisant le caractère contractant de cos sur l'intervalle d'étude (on doit redémontrer rapidement ce qu'on utilise). Attention à la faute classique consistant à affirmer que, puisque cos a un unique point fixe sur $[0,1]$, nécessairement u_{2n} et u_{2n+1} doivent tendre vers ce point fixe : non, on sait seulement que ces suites doivent converger (par monotonie et caractère borné) vers un point fixe de $\cos \circ \cos$.

2 Exercice – Nombres de Catalan

1. Les manipulations d'indices sont souvent difficiles. On déconseille fortement d'utiliser le même indice n pour des choses fondamentalement différentes ; voir le corrigé pour le calcul.

2. Il n'est pas nécessaire de montrer que f est $\mathcal{C}^\infty$. Il suffit de remarquer que le numérateur a un DL à tout ordre et que celui-ci n'a pas de terme constant.
   On pouvait aussi utiliser une quantité conjuguée pour résoudre la fausse singularité en 0 (observé dans deux copies).

3. Ne pas oublier de distinguer le cas $x = 0$ dans le calcul. Ensuite, clairement dire qu'on utilise l'unicité des coefficients d'un développement limité puis que, les coefficients du DL de f et les nombres de Catalan vérifiant la même relation de récurrence, ils doivent être égaux. Arguments souvent confus.

4. Un calcul classique, proche de celui du DL de Arcsin. A savoir refaire.

5. Application de la formule de Stirling. Ne pas laisser un $n + 1$ dans un équivalent ; remplacer par n.

3 Exercice – Un calcul d'équivalent

1. L'existence de la limité est assurée par le théorème de la limite monotone. Pas besoin d'écrire la récurrence pour affirmer que les x_n sont tous positifs.

2. Des inégalités dans le mauvais sens dans quelques copies. Dans ce genre de questions, écrire au brouillon la quantité considérée et chercher quelle quantité on peut estimer pour arriver au $\dfrac{2}{n}$.

3. On a une somme téléscopique. L'inégalité $H_n \geq \ln n$ doit être justifiée. Attention ! Dire que $H_n \sim \ln n$ ou même que $H_n = \ln n + \gamma + o(1)$ ne peut pas suffire pour conclure à une inégalité : aucune estimation asymptotique (ici quand $n \to +\infty$) ne peut permettre d'obtenir une inégalité valable pour tout n.

4. (a) Une transformation d'Abel.
   (b) Par la recherche d'un équivalent ; ou en utilisant la quantité conjuguée ; ou en appliquant le théorème des accroissements finis.
   (c) Attention à ne pas confondre le terme $u_k = k\big(\sqrt{\ln(k+1)} - \sqrt{\ln k}\big)$, avec la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} u_k$. La justification que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$ est un $o(n \ln n)$ (et même un $o(n)$) vient du lemme de Cesàro.

5. La manipulation des ε est compliquée. Penser que si $u_n \sim v_n$, alors $\dfrac{u_n}{v_n} \to 1$ et donc $\dfrac{u_n}{v_n} \leq 1 + \varepsilon$ si n est assez grand.

6. On dit (sans dérivée) que les fonction considérée est décroissante et on applique la méthode vue en cours. Ne pas aller trop vite sur l'équivalent : il faut bien justifier que les deux encadrants obtenus avec des intégrales sont équivalents entre eux (ce qui sera presque toujours vrai, tant que la fonction n'explose pas).

7. cf. corrigé

4 Problème – Théorème d'unicité de Cantor

4.1 Un lemme sur les séries

1. Ne pas confondre le terme général d'une série, avec la série ou la somme de la série (dans le cas convergent). En particulier, on n'écrit pas $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ (ce qui n'a pas de sens) ; on écrit plutôt $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n$ (et donc si p. ex. $\sum v_n$ est convergente, alors $\sum u_n$ aussi ; dans le cas de séries à termes positifs).
2. Ne pas oublier de justifier que $s_N u(Nt) \to 0$.
3. **Majoration des séries $\sum \Big|U(nt) - U\big((n+1)t\big)\Big|$.**
   (a) Le calcul du DL de U' en 0 est un peu approximatif. Le fait que U est prolongeable par continuité en 0 n'est pas demandé.
   (b) Bien distinguer ce qui se passe au voisinage de $+\infty$ (donc pour x assez grand), de ce qui se passe sur les autres réels (obtenus par TBA, la fonction U' étant désormais continue sur un segment $[0, a]$).
   (c) Citer correctement le théorème des accroissements finis et expliciter l'inégalité utilisée sur $\dfrac{1}{1+x^2}$.
   (d) Il y avait une erreur dans le sujet. On obtient cette inégalité par une comparaison série-intégrale.
   (e) cf. corrigé
4. En tant que reste d'une série convergente, le fait qu'un tel N existe est clair. Mais il a échappé à beaucoup qu'on demande un N indépendant de t ; c'est pour cette indépendance par rapport à t qu'on a cherché à obtenir les inégalités précédentes.
5. Le comportement sur $\sum_{n=0}^{N-1}$ est un simple argument de continuité. Il n'est pas nécessaire d'expliciter quel t convient.

4.2 Un lemme de convexité

6. On utilise la formule de Taylor-Young. Reconnaître dans cette expression une double limite avec les taux d'accroissement de la dérivée et de la dérivée seconde est peu convaincant (ce n'est pas une composition de limites ; plutôt une variante sur le thème *Je passe à la limite en deux temps*).
7. (a) Une fonction non-convexe n'est pas une fonction concave. De même, une fonction non-décroissante n'est pas une fonction croissante ; une fonction non-impaire n'est pas paires ; une matrice non-symétrique n'est pas anti-symétrique...
   (b) La dérivée f'' ne doit pas apparaître : f n'est pas supposé deux fois dérivable...
   (c) RAS

8. De nouveau, ne pas écrire de f'' ou f''_ε. L'intérêt de cette notion est justement de caractériser la convexité avec une *fausse* dérivée seconde.
   Le passage de f_ε convexe à f convexe s'obtient par un passage à la limite dans une inégalité caractérisant la convexité.

9. Quand il est explicitement demandé d'*en déduire* que f est affine, on attend une démonstration ; tant mieux s'il est évident pour vous qu'une fonction convexe et concave est affine.

4.3 Théorème d'unicité – Cas $c_n \to 0$

10. Formellement $\sum \frac{c_n}{(in)^2} e^{inx}$ n'est pas une série (l'indexation est sur $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$). Il est préférable d'écrire l'argument avec la vraie série sous-jacente : $\sum_{n\geq 1} \frac{c_n}{(in)^2} e^{inx} + \frac{c_{-n}}{(in)^2} e^{-inx}$.

11. Un calcul un peu long, mais ne présentant pas de vraie difficulté. *S'entraîner* à ces calculs qui reviennent tout le temps.

12. Application de la partie 4.1. On ne connait pas en Sup d'argument général pour intervertir deux procédés limité ; ici une limite et une somme infinie.

13. Les α, β sont *a priori* complexes, contrairement à ce qui était dit. Pour faire correctement la question, il faut savoir que F est continue (j'avoue avoir oublié ce point dans l'écriture du sujet) pour appliquer la partie 4.2. Le fait que F est à valeurs complexes ne pose pas de problème : on considère séparément les parties réelle et imaginaire de F.

14. Plusieurs arguments possibles : périodicité ou caractère borné (par rapport à x !) de la somme

15. Pour justifier d'une convergence uniforme, on doit montrer que la différence $|G(x) - G_N(x)|$ est majorée par une quantité qui tend vers 0, *indépendante de x*.

16. Ne pas oublier le cas $k = n$!

17. Argument souvent confus, selon la valeur trouvée à la question précédente.

4.4 Conclusion dans le cas général

RAS