Algèbre linéaire - Déterminants

1 Exercices théoriques

Exercice 1. ●○○ *Déterminant d'une matrice à coefficients entiers*
Soit A une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{Z})$.

1. Montrer que si tous les coefficients de A sont pairs, alors 2^n divise $\det(A)$.
2. Montrer que si tous les coefficients de A sont impairs, alors 2^{n-1} divise $\det(A)$.

Exercice 2. ●◐○ *Déterminant de $M \mapsto M^T$*
Calculer le déterminant de l'endomorphisme ϕ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ défini par $\phi(M) = M^T$.

Exercice 3. ♣/♢ – ●◐○ *Semblables dans $\mathbb{C}$, semblables dans $\mathbb{R}$*
Soient A et B deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose qu'elles sont semblables sur $\mathbb{C}$, c'est-à-dire qu'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $A = PBP^{-1}$. On écrit $P = P_1 + iP_2$, avec P_1 et P_2 dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, si $P_t = P_1 + tP_2$, alors $AP_t = P_tB$.
2. Montrer qu'on peut choisir t tel que P_t est inversible.
3. En déduire que A et B sont semblables sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4. ♣ – ●◐○ *$\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est ouvert dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$*
Soient $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\forall t \in]-\varepsilon, \varepsilon[, A + tB \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 5. ♢ – ●◐○ *Matrices par blocs*
Soient $A, B, C, D \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et soit $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{2n}(\mathbb{K})$.
Montrer que si $CD = DC$, alors $\det M = \det(AD - BC)$.

Exercice 6. ●◐○ *Formules de Cramer*
Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, soit $B \in \mathbb{K}^n$. On note $C_1, \dots, C_n$ les colonnes de A et $X = (x_1 \dots x_n)^T$ l'unique solution de $AX = B$. Montrer que $\forall k \in [\![1, n]\!], x_k = \dfrac{1}{\det A} \times \det(C_1, \dots, C_{k-1}, B, C_{k+1}, \dots, C_n)$.

Exercice 7. ●◐○ *Une inégalité avec une matrice de rang 1*
Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, avec B de rang 1. Montrer que $\det\big((A+B)(A-B)\big) \leq (\det A)^2$.

Exercice 8. ♣/♢ – ●●○ *Liberte d'une famille de fonctions*
Soient X un ensemble, $f_1, \dots, f_n \in \mathscr{F}(X, \mathbb{K})$.
Montrer que $(f_1, \dots, f_n)$ est libre ssi $\exists x_1, \dots, x_n \in X : \big(f_i(x_j)\big)_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.

Exercice 9. ♣ – ●●○ $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$
On note $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$ l'ensemble des matrices $n \times n$ à coefficients entiers de déterminant 1.

1. Montrer que $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$ est un groupe, pour la multiplication matricielle.
2. Que dire du PGCD des éléments d'une ligne/colonne d'une matrice de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$?
3. Montrer que toute matrice de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ est un produit de matrices $I_2 \pm E_{i,j}$, où i et j sont distincts dans $\{1,2\}$. Généraliser à $n \geq 2$.

Exercice 10. ♣/♢ – ●●○ *Trace et déterminant*
Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension n. Soit $\mathbf{e}$ une base de E. Montrer que, pour tout $(x_1,\dots,x_n) \in E^n$: $\sum_{k=1}^{n} \det_{\mathbf{e}}(x_1,\dots,f(x_k),\dots,x_n) = \mathrm{Tr}(f)\det_{\mathbf{e}}(x_1,\dots,x_n)$.

Exercice 11. ●●○ *Déterminant et matrice nilpotente*
Soit $N \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice nilpotente.

1. Que vaut $\det N$?
2. Que vaut $\det(I_n + N)$?
3. Soit $U \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $UN = NU$. Montrer que $\det(U+N) = \det U$.

Exercice 12. ♢ – ●●○ *Rang de la comatrice*
Soit A une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Donner le rang de $\mathrm{Com}(A)$ en fonction du rang de A.

Exercice 13. ♣ – ●●○ *Densité de Zariski, comatrices*
Soit $\mathbb{K}$ un corps infini.

1. Montrer que si $A, B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, alors $\mathrm{Com}(AB) = \mathrm{Com}\,A\,\mathrm{Com}\,B$.
2. En considérant $A - \lambda I_n$ et $B - \lambda I_n$, pour $\lambda \in \mathbb{K}$, montrer que l'égalité demeure si $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
3. Montrer que le résultat reste vrai si $\mathbb{K}$ est un corps fini.

Exercice 14. ♣ – ●●○ *Résultant de deux polynômes*
Soient F, G deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$ de degrés respectifs n et m. On considère l'application

$$\begin{cases} \Phi : & \mathbb{K}_{m-1}[X] \times \mathbb{K}_{n-1}[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}_{n+m-1}[X] \\ & (U,V) & \longmapsto & UF + VG \end{cases}$$

1. Montrer que Φ est bien définie et linéaire.
   Donner une condition nécessaire et suffisante sur F et G pour qu'elle soit injective.
2. Donner la matrice de Φ dans les bases canoniques.

On appelle *résultant* de U et V le déterminant de cette matrice.

3. On appelle *discriminant* du polynôme P le résultant de P et P'.
   Donner une condition nécessaire et suffisante sur P pour que son discriminant soit nul.
4. Déterminer le discriminant de $aX^2 + bX + c$ et de $X^3 + pX + q$.

EXERCICE 15. ♣ – ●●◐ *Marchand de cailloux*
Un bijoutier vend $2n+1$ pierres précieuses. On suppose que, chaque fois qu'on retire une pierre précieuse, on peut partager les $2n$ autres en deux tas de n pierres de même valeur.
Montrer que toutes les pierres précieuses ont la même valeur.

2 Calculs concrets

EXERCICE 16. ●○○ *Intégration de polynômes*

1. Montrer que pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, il existe un unique $I_P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que
$$\forall x \in \mathbb{R}, I_P(x) = \int_x^{x+1} P(t)dt.$$
2. Montrer que $P \mapsto I_P$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ et calculer son déterminant.

EXERCICE 17. ●○○ *Dérivation*
Soit $E = \left\{x \mapsto P(x)e^x, P \in \mathbb{R}_n[X]\right\}$.

1. Montrer que $f \mapsto f'$ est un endomorphisme de E.
2. Calculer son déterminant.

EXERCICE 18. ♣ – ●○○ *Des factorisations astucieuses*
Exprimer sous forme factorisée :

1. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c & a+c & a+b \end{vmatrix}$
2. $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^4 & b^4 & c^4 \end{vmatrix}$
3. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \sin(a) & \sin(b) & \sin(c) \\ \cos(a) & \cos(b) & \cos(c) \end{vmatrix}$

EXERCICE 19. ♣ – ●◐○ *Déformation de I_n par une matrice de rang* 1
Soient $X, Y \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Calculer $\det(I_n + XY^T)$.

EXERCICE 20. ●◐○ *Déterminant du produit matriciel*
Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Calculer le déterminant de $\phi_{A,B} \in \mathscr{L}\big(\mathscr{M}_n(\mathbb{K})\big)$, définie par $\phi_{A,B}(M) = AMB$.

EXERCICE 21. ●●○ *Calculs - 1*
Calculer le déterminant de $A = (a_{i,j}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, dans chacun des cas suivants ($\alpha_i, \beta_j \in \mathbb{K}$) :

1. $a_{i,j} = \max(i,j)$
2. $a_{i,j} = \min(i,j)$
3. $a_{i,j} = |i-j|$
4. $a_{i,j} = \delta_{i,j} + \alpha_i\beta_j$
5. $a_{i,j} = (\alpha_i + \beta_j)^{n-1}$
6. $a_{i,j} = 1 + \alpha_i^j$

EXERCICE 22. ♣ – ●●○ *Calculs - 2*
Calculer les déterminants suivants : (A_n, B_n et C_n dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$)

1. $A_n = \begin{vmatrix} 1 & n & n & \dots & n \\ n & 2 & n & \ddots & \vdots \\ n & n & 3 & \ddots & n \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ n & \dots & n & n & n \end{vmatrix}$ 2. $B_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix}$ 3. $C_n = \begin{vmatrix} a & b & b & \dots & b \\ b & a & b & \ddots & \vdots \\ b & b & a & \ddots & b \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ b & \dots & b & b & a \end{vmatrix}$

EXERCICE 23. ●●○ *Calculs - 3*
Soit $n \geq 2$, soit $P \in \mathbb{K}_{n-2}[X]$.
Calculer le déterminant de la matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ de coefficients $a_{i,j} = P(i+j-1)$.

EXERCICE 24. ●●○ *Une relation de récurrence*
On considère la matrice $M_n \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ égale à

$$\begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 & \dots & 0 \\ c & a & b & \ddots & & 0 \\ 0 & c & a & b & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & b \\ 0 & 0 & \dots & \dots & c & a \end{pmatrix}.$$

1. Trouver une relation de récurrence linéaire d'ordre 2 pour la suite $\det(M_n)$.

2. En déduire la valeur de $\det(M_n)$ dans le cas particulier où il existe deux scalaires x et y tels que $c = 1$, $a = x + y$ et $b = xy$.

EXERCICE 25. ♣/♢ – ●●○ *Vandermonde lacunaire*
Soient $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{K}$. Calculer le déterminant de $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, définie par

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_0^{k-1} & a_1^{k-1} & \cdots & a_{n-1}^{k-1} \\ a_0^{k+1} & a_1^{k+1} & \cdots & a_{n-1}^{k+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_0^n & a_1^n & \cdots & a_{n-1}^n \end{pmatrix};$$

EXERCICE 26. ♣/♢ – ●●○ *Déterminant d'une matrice circulante*
On cherche à calculer le déterminant de la *matrice circulante* suivante

$$C(a_0, \dots, a_{n-1}) = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & a_1 & \dots & a_{n-2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_2 & \dots & a_{n-1} & a_0 & a_1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_0 \end{pmatrix},$$

où les a_i sont des nombres complexes.

On utilise pour ce faire une méthode polynomiale et on remplace a_0 par une variable $x \in \mathbb{C}$.

1. Justifier que l'application $P : x \mapsto \det\big(C(x, a_1, \dots, a_{n-1})\big)$ est polynomiale de degré n et préciser son coefficient dominant.

2. On note $\omega_k = e^{2ik\pi/n}$, pour $k \in [\![0, n-1]\!]$. Montrer que, pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, les quantités $c_k = -\sum_{j=1}^{n-1} a_j \omega_k^j$ sont des racines de P.

3. On suppose pour simplifier que les c_k sont deux à deux distincts. Donner la forme factorisée de P et en déduire la valeur de $\det\big(C(a_0, \dots, a_{n-1})\big)$.

4. Montrer que le résultat précédent reste vrai si on ne suppose plus les c_k deux à deux distincts.

EXERCICE 27. ●●● *Déterminant de Smith*
Calculer le déterminant de la matrice $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ où $a_{i,j}$ est le nombre de diviseurs communs à i et j.

Indications

Exercice 3. Pour 2., considérer l'application $t \mapsto \det(P_t)$

Exercice 5. Commencer par le cas où $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.

Exercice 8. Raisonner par récurrence et considérer le déterminant de la matrice avec $x_1, \dots, x_{n-1}$ fixés et x_n variable.

Exercice 10. Montrer que le membre de gauche – vue comme fonction de $(x_1, \dots, x_n)$ – définit une forme n-linéaire alternée sur E.

Exercice 12. Le rang de A est la taille maximale d'une matrice carrée inversible extraite de A.

Exercice 25. Considérer cette matrice comme une matrice $(n-1) \times (n-1)$ extraite d'une matrice de Vandermonde $n \times n$, avec un coefficient variable.

Exercice 26. Pour 3., introduire le polynôme $Q = \sum_{j=0}^{n-1} a_j X^j$.