DM 18a - Déterminant de Cauchy

1 Déterminant de Cauchy

On se donne $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{K}$ tels que pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, $a_i + b_j \neq 0$. On cherche à calculer le déterminant Δ_n de la matrice $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, de terme général $C_{i,j} = \frac{1}{a_i + b_j}$.

1. Que vaut Δ_n s'il existe deux indices $i \neq i' \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tels que $a_i = a_{i'}$?
2. On suppose désormais les a_i deux à deux distincts. Montrer qu'il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tels que

$$R(X) = \frac{(b_1 - X) \dots (b_{n-1} - X)}{(X + a_1) \dots (X + a_n)} = \frac{\lambda_1}{X + a_1} + \dots + \frac{\lambda_n}{X + a_n}.$$

3. Déterminer pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ la valeur de λ_k .
4. On note $L_1, \dots, L_n$ les lignes de C . En opérant sur les lignes de C pour transformer L_n en $\sum_{i=1}^n \lambda_i L_i$, montrer que

$$\lambda_n \Delta_n = R(b_n) \Delta_{n-1},$$

où Δ_{n-1} est le déterminant de $(C_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n-1}$.

5. En déduire par récurrence la valeur de Δ_n .