

2 Matrices et espaces symplectiques

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On sera amené dans le problème à manipuler des matrices $M \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$, souvent écrites par blocs

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix},$$

où $A, B, C, D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note I_n la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, I_{2n} la matrice identité de $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ et $J \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ la matrice

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}.$$

2.1 Le groupe symplectique Sp_{2n}

On note $\mathrm{Sp}_{2n} = \{M \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R}) \mid M^T J M = J\}$.

1. Calculer J^2 et J^T . En déduire que J est inversible et exprimer son inverse.
2. Déterminer $\det J$.
3. Montrer que $J \in \mathrm{Sp}_{2n}$.
4. Montrer que si $M \in \mathrm{Sp}_{2n}$, alors $\det M = \pm 1$.

On montrera dans la suite qu'on a en fait toujours $\det M = 1$.

5. Montrer que Sp_{2n} est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{R})$ et qu'il est stable par transposition.

Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on note $K(\alpha)$ la matrice de $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ définie par $K(\alpha) = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ -\alpha I_n & I_n \end{pmatrix}$.

Pour tout $U \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, on note L_U la matrice de $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ définie par $L_U = \begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & (U^{-1})^T \end{pmatrix}$.

6. Montrer que, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ et pour tout $U \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, les matrices $K(\alpha)$ et L_U sont dans Sp_{2n} .

2.2 Centre de Sp_{2n}

On note $\mathcal{Z}$ le *centre* de Sp_{2n} , défini par

$$\mathcal{Z} = \{M \in \mathrm{Sp}_{2n} \mid \forall N \in \mathrm{Sp}_{2n}, MN = NM\}.$$

Soit $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ une matrice dans $\mathcal{Z}$.

7. En utilisant des matrices bien choisies de Sp_{2n} , montrer que

- a) $B = C = 0$ et $A = D$.
 - b) Pour tout $U \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$, A commute avec U .
8. Soit N une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, qui commute avec toute matrice de $\text{GL}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $N = \lambda I_n$.
- On pourra utiliser des matrices d'opérations élémentaires.*
9. Déterminer $\mathcal{Z}$.

2.3 Déterminant d'une matrice de Sp_{2n}

Soit $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ dans Sp_{2n} . On souhaite montrer que $\det M = 1$.

- 10. Montrer que $A^T C$ et $B^T D$ sont symétriques et que $C^T B - A^T D = -I_n$.
- 11. Dans cette question seulement, on suppose D inversible.
 - a) Montrer qu'il existe $U, V, W, Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $M = \begin{pmatrix} I_n & Q \\ 0 & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U & 0 \\ V & W \end{pmatrix}$.
 - b) En déduire que $\det M = \det(D^T A - B^T C) = 1$.
- 12. Si $X, Y \in \mathbb{R}^n$ – qu'on identifie à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ – on note $\langle X, Y \rangle = X^T Y \in \mathbb{R}$ leur *produit scalaire*. On admet qu'on définit ainsi une *forme bilinéaire* sur $\mathbb{R}^n$.
 - a) Montrer que, pour toute $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et pour tous $X, Y \in \mathbb{R}^n$,

$$\langle MX, Y \rangle = \langle X, M^T Y \rangle.$$
 - b) Montrer que si $X_1, \dots, X_p \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ vérifient $\forall i \neq j \in \llbracket 1, p \rrbracket, \langle X_i, X_j \rangle = 0$, alors la famille $(X_1, \dots, X_p)$ est libre.
 - c) Soient α, β deux réels distincts, soient $X, Y \in \mathbb{R}^n$ tels que $X \in \text{Ker}(D + \alpha B)$ et $Y \in \text{Ker}(D + \beta B)$. Montrer que $\langle DX, DY \rangle = 0$.
- 13. Montrer que $\text{Ker } B \cap \text{Ker } D = \{0\}$.
- 14. Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ des réels non nuls deux à deux distincts et $X_1, \dots, X_p$ tels que, pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket, X_i \in \text{Ker}(D + \alpha_i B) - \{0\}$. Montrer que les DX_i sont non nuls, puis que la famille $(DX_1, \dots, DX_p)$ est libre.
- 15. En déduire qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $D + \alpha B$ est inversible.
- 16. En déduire que $\det M = 1$.

2.4 Espaces symplectiques et symplectomorphismes

Soit E un espace vectoriel réel de dimension d . On appelle *forme symplectique* sur E une forme bilinéaire alternée $\omega : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$, vérifiant de plus la propriété suivante dite de *non-dégénérescence* :

$$\forall x \in E - \{0\}, \exists y \in E : \omega(x, y) \neq 0.$$

On fixe une telle forme ω . Soit F un sous-espace vectoriel de E . On note

$$F^\omega = \{y \in E \mid \forall x \in F, \omega(x, y) = 0\}$$

son *orthogonal symplectique* ; on admet que c'est un sous-espace vectoriel de E .

17. Pour tout $x \in E$, on note $\ell_x \in F^*$ la forme linéaire définie sur F par

$$\forall y \in F, \ell_x(y) = \omega(x, y).$$

Montrer que $\phi : x \mapsto \ell_x$ est une application linéaire de E dans F^* .

On admet que ϕ est surjective.

18. En déduire que $\dim F^\omega = \dim E - \dim F$.

19. Soit $e \in E - \{0\}$. Montrer qu'il existe $f \in E$ tel que $\omega(e, f) = 1$.

20. On fixe deux tels vecteurs e et f et on note $H = \text{Vect}(e, f)$. Montrer que $E = H \oplus H^\omega$.

21. En déduire que d est pair et que, en notant $d = 2n$, on peut trouver une base $\mathbf{b} = (e_1, \dots, e_n, f_1, \dots, f_n)$ de E telle que

$$\forall i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \omega(e_i, e_j) = \omega(f_i, f_j) = 0 \text{ et } \omega(e_i, f_j) = -\omega(f_j, e_i) = \delta_{i,j}.$$

On fixe une telle base $\mathbf{b}$ de E . Un endomorphisme f de E est un *symplectomorphisme* si $\forall x, y \in E, \omega(f(x), f(y)) = \omega(x, y)$. On note X et Y les matrices colonnes représentant des vecteurs x et y de E dans la base $\mathbf{b}$.

22. Montrer que pour tous $x, y \in E, \omega(x, y) = X^T J Y$. En déduire que $f \in \mathcal{L}(E)$ est un symplectomorphisme ssi $\text{Mat}_{\mathbf{b}}(f) \in \text{Sp}_{2n}$.

On définit $d : E^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$ par : $\forall x_1, \dots, x_{2n} \in E,$

$$d(x_1, \dots, x_{2n}) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_{2n}} \varepsilon(\sigma) \omega(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}) \dots \omega(x_{\sigma(2n-1)}, x_{\sigma(2n)}).$$

23. Montrer qu'il existe un réel λ tel que

$$\forall x_1, \dots, x_{2n} \in E, d(x_1, \dots, x_{2n}) = \lambda \det_{\mathbf{b}}(x_1, \dots, x_{2n}).$$

24. Montrer que $\lambda = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} 2^n \times n!$.

25. En déduire une autre preuve que si $M \in \text{Sp}_{2n}$, alors $\det M = 1$.