DM 18a - Déterminant de Cauchy

1 Déterminant de Cauchy

1. S'il y a deux indices $i \neq i'$ tels que $a_i = a_{i'}$, alors les lignes i et i' de C sont les mêmes, donc $\Delta_n = 0$.

2. La fraction rationnelle $R(X)$ est de degré $(n-1) - n = -1$. Son dénominateur est de degré n et a pour racines $-a_1, \dots, -a_n$, toutes simples car les a_i sont deux à deux distincts. Par le théorème de décomposition en éléments simples, il existe des scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tels que
$$R(X) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k}{X + a_k}.$$

3. Soit $k \in [\![1, n]\!]$. On multiplie les deux membres de l'égalité précédente par $X + a_k$. Alors $-a_k$ n'est plus un pôle des fractions obtenues ; on évalue en $-a_k$ et on trouve :
$$\frac{\prod_{i=1}^{n-1}(b_i + a_k)}{\prod_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq k}}(a_j - a_k)} = \lambda_k.$$

4. Considérons la combinaison linéaire $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i L_i$. Son coefficient en colonne j est $\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{a_i + b_j} = R(b_j)$. Par construction des λ_i, on a $R(b_j) = 0$ si $j \leq n-1$.

   Considérons maintenant la matrice $\tilde{C}$ obtenue en multipliant la dernière ligne de C par λ_n. Par linéarité par rapport à la dernière ligne, $\det(\tilde{C}) = \lambda_n \Delta_n$.

   De plus, ajouter à la dernière ligne une combinaison linéaire des autres ne modifie pas le déterminant. Donc $\det(\tilde{C})$ est aussi le déterminant de la matrice :
$$\begin{pmatrix} \frac{1}{a_1 + b_1} & \cdots & \frac{1}{a_1 + b_{n-1}} & \frac{1}{a_1 + b_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{a_{n-1} + b_1} & \cdots & \frac{1}{a_{n-1} + b_{n-1}} & \frac{1}{a_{n-1} + b_n} \\ 0 & \cdots & 0 & R(b_n) \end{pmatrix}$$
   obtenue en modifiant la dernière ligne de $\tilde{C}$ (donc $\lambda_n L_n$) par $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i L_i$.

   Cette matrice est triangulaire par blocs (*ou bien on développe selon la dernière ligne/colonne*) et donc son déterminant vaut $R(b_n)\Delta_{n-1}$.

   Donc, $\lambda_n \Delta_n = R(b_n)\Delta_{n-1}$.

5. Par hypothèse, tous les scalaires $a_i + b_j$ sont non nuls. En particulier, $\lambda_n \neq 0$ et on peut réécrire l'identité précédente sous la forme :

$$\frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}} = \frac{R(b_n)}{\lambda_n} = \frac{\prod_{1\leq j\leq n-1}(a_j - a_n)}{\prod_{i=1}^{n-1}(b_i + a_n)} \frac{\prod_{1\leq j\leq n-1}(b_j - b_n)}{\prod_{i=1}^{n}(b_n + a_i)}.$$

Le numérateur peut être réécrit $\prod\limits_{1\leq j\leq n-1}(a_j - a_n)(b_j - b_n)$. Le dénominateur est le produit des termes $a_i + b_j$, avec l'un des indices i ou j égal à n.

De plus, $\Delta_n = \prod\limits_{k=1}^{n} \frac{\Delta_k}{\Delta_{k-1}}$, avec par convention $\Delta_0 = 1$ (déterminant de la matrice de taille 0). Avec un peu de réflexion, on conjecture que le produit téléscopique donne la formule suivante :

$$\Delta_n = \frac{\prod_{1\leq j<i\leq n}(a_j - a_i)(b_j - b_i)}{\prod_{1\leq i,j\leq n}(a_i + b_j)}.$$

Si on n'est pas tout à fait convaincu, on peut montrer la formule par récurrence. On trouve bien $\Delta_1 = \dfrac{1}{a_1 + b_1}$ *(le produit du haut est vide) et il s'agit alors de vérifier que, si* T_n *est l'expression de droite, alors* $\dfrac{T_n}{T_{n-1}}$ *donne bien l'expression trouvée pour* $\dfrac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}$*, ce qui ne pose pas de difficultés.*

Remarque : on constate immédiatement que le déterminant est nul ssi deux a_i ou deux b_i sont égaux. Seule une implication était évidente (*comme pour la matrice de Vandermonde*).