On a bien :
$$n!R_n = 1 + \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

6. Soit $n \geq 2$, soit $k \in [\![0, n-2]\!]$. Le terme $\dfrac{n!}{k!}$ peut se réécrire $\displaystyle\prod_{i=k+1}^{n} i$; c'est un produit d'au moins deux entiers consécutifs, donc un entier pair. Donc, chaque $\dfrac{n!}{k!}$ est un entier pair, et donc $n!\displaystyle\sum_{k=0}^{n-2}\frac{1}{k!}$ aussi.

   On a $e = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-2}\frac{1}{k!} + \frac{1}{(n-1)!} + R_n$. Donc,
$$n!e = 2u_n + n + n!R_n,$$
   où u_n est un entier. Donc,
$$\sin(n!e\pi) = \sin(2u_n\pi + n\pi + n!R_n\pi) = (-1)^n \sin(n!R_n\pi).$$

7. On a donc (Q5 et Q7)
$$\sin(n!e\pi) = (-1)^n \sin\left(\pi + \frac{\pi}{n} + O(1/n^2)\right) = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

8. Le terme $\sin(n!e\pi)$ est donc la somme de $(-1)^{n+1}\dfrac{\pi}{n}$, terme général d'une série convergente (critère des séries alternées) et d'un $O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$, terme général d'une série absolument convergente (par comparaison à la série de Riemann). Donc, la série $\sum \sin(n!e\pi)$ converge.

2 Matrices et espaces symplectiques

2.1 Le groupe symplectique Sp_{2n}

1. Par produit par blocs, on trouve $J^2 = -I_{2n}$. De plus, on a immédiatement $J^T = -J$. La relation $J^2 = -I_{2n}$ peut se réécrire $J \times (-J) = I_{2n}$, donc J est inversible et $-J$ est son inverse.

2. Si on transpose les colonnes k et $n+k$ de J, pour tout $k \in [\![1_n$, on obtient une matrice diagonale avec n termes -1 et n termes 1. Cette matrice diagonale a donc un déterminant égal à $(-1)^n$. De plus, chaque transposition des colonnes multiplie le déterminant par (-1) ; comme on fait n transpositions, on a $\det J = (-1)^n \times (-1)^n = 1$.

3. On a $J^TJJ = (-J)(-I_{2n}) = J$. Donc, $J \in \mathrm{Sp}_{2n}$.

4. Soit $M \in \mathrm{Sp}_{2n}$. On a donc $M^TJM = J$. En prenant les déterminants, on a donc :
$$\det(J) = \det(M^TJM) = \det(M^T)\det(J)\det(M) = \det(M)^2\det(J).$$
Comme $\det(J) = 1$, on peut simplifier et on obtient $\det(M)^2 = 1$, donc $\det M = \pm 1$.

5. Sp_{2n} est non vide puisqu'il contient J (ou I_{2n}). Soient $M, N \in \mathrm{Sp}_{2n}$. On calcule :
$$(MN)^TJ(MN) = N^T(M^TJM)N = N^TJN = J.$$
Donc, $MN \in \mathrm{Sp}_{2n}$.
De plus, la question précédente montre que M est inversible et on sait que $J^{-1} = -J$. En multipliant par $(M^T)^{-1}$ à gauche et par M^{-1} à droite dans la relation $M^TJM = J$, on obtient :
$$J = (M^T)^{-1}JM^{-1} = (M^{-1})^TJM^{-1},$$
ce qui montre que $M^{-1} \in \mathrm{Sp}_{2n}$. Ainsi, Sp_{2n} est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{R})$.
Enfin, un passage à l'inverse dans la relation $J = (M^{-1})^TJM^{-1}$ donne (en utilisant $J^{-1} = -J$)
$$M(-J)M^T = -J,$$
qu'on peut encore écrire $(M^T)^TJM^T = J$, c'est-à-dire $M^T \in \mathrm{Sp}_{2n}$.
Ainsi, Sp_{2n} est stable par transposition.

6. On fait des calculs par blocs. Soient $\alpha \in R, U \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.
$$\begin{pmatrix} I_n & -\alpha I_n \\ 0 & I_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ -\alpha I_n & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha I_n & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ -\alpha I_n & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix},$$
donc $K(\alpha)^TJK(\alpha) = J$ et $K(\alpha) \in \mathrm{Sp}_{2n}$. De même,
$$\begin{pmatrix} U^T & 0 \\ 0 & U^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & (U^{-1})^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -U^T \\ U^{-1} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & (U^{-1})^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix},$$
donc $L_U^TJL_U = J$ et $L_U \in \mathrm{Sp}_{2n}$.

2.2 Centre de Sp_{2n}

7. a) M doit commuter avec la matrice $K(1) = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ -I_n & I_n \end{pmatrix}$. On a
$$K(1)M = \begin{pmatrix} A & B \\ -A+C & -B+D \end{pmatrix} \text{ et } MK(1) = \begin{pmatrix} A-B & B \\ C-D & D \end{pmatrix}.$$

On en déduit par identification que $B = 0$ et que $A = D$. De plus, comme Sp_{2n} est stable par transposition, on vérifie immédiatement que $\mathcal{Z}$ l'est aussi. Donc, M^T doit aussi vérifier les conditions qu'on vient de trouver pour M ; ceci force $C = 0$. (*On peut aussi plus simplement refaire le calcul avec la transposée de* $K(1)$.)

b) Soit $U \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. La matrice $M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$ doit donc aussi commuter avec L_U. Or,

$$ML_U = \begin{pmatrix} AU & 0 \\ 0 & A(U^{-1})^T \end{pmatrix} \text{ et } L_U M = \begin{pmatrix} UA & 0 \\ 0 & (U^{-1})^T A \end{pmatrix}.$$

La comparaison des blocs en haut à gauche montre que A doit commuter avec U.

8. Considérons deux indices i et j distincts dans $[\![1, n]\!]$. Alors, la matrice $I_n + E_{i,j}$ est une matrice inversible (matrice de transvection, d'inverse $I_n - E_{i,j}$). Si N commute à toute matrice de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, on a donc $N(I_n - E_{i,j}) = (I_n - E_{i,j})N$, d'où $NE_{i,j} = E_{i,j}N$. On écrit $N = \sum_{k,l} n_{k,l}E_{k,l}$ et l'égalité devient :

$$\sum_k n_{k,i}E_{k,j} = \sum_l n_{j,l}E_{i,l}.$$

La comparaison des composantes devant $E_{i,j}$ donne $n_{i,i} = n_{j,j}$. De plus, pour tout $k \neq i$, on doit avoir $n_{k,i} = 0$ car le membre de droite n'a pas de composante devant $E_{k,j}$.

On rappelle que i et j étaient quelconques. On a donc montré que tous les termes diagonaux de N étaient égaux et que tous les termes non diagonaux étaient nuls. Donc N est une matrice scalaire λI_n.

9. Par la question 7, si $M \in \mathcal{Z}$, alors M est de la forme $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$, où A commute avec toute matrice de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Par la question 8, A est donc de la forme λI_n, donc M est de la forme λI_{2n}. Cette matrice est de déterminant λ^{2n} ; par la question 4, on doit donc avoir $\lambda = \pm 1$. Ainsi, $M = \pm I_{2n}$.

Réciproquement, on vérifie immédiatement que $\pm I_{2n} \in \mathcal{Z}$.

Donc, $\mathcal{Z} = \{\pm I_{2n}\}$.

2.3 Déterminant d'une matrice de Sp_{2n}

10. On calcule $M^T JM$:

$$\begin{pmatrix} A^T & C^T \\ B^T & D^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C^T & -A^T \\ D^T & -B^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C^T A - A^T C & C^T B - A^T D \\ D^T A - B^T C & D^T B - B^T D \end{pmatrix}.$$

Ceci doit être égal à J. L'identification en haut à gauche donne $C^TA = A^TC$, c'est-à-dire A^TC symétrique. De même, l'identification en bas à droite donne B^TD symétrique. Enfin, l'égalité $C^TB - A^TD = -I_n$ vient de l'identification en haut à droite.

11. Dans cette question seulement, on suppose D inversible.

    a) On raisonne par analyse-synthèse. Si U, V, W, Q conviennent, on a en développant :
    $$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U + QV & QW \\ V & W \end{pmatrix}.$$
    On en déduit successivement $V = C$, $W = D$, $Q = BW^{-1} = BD^{-1}$ et $U = A - QV = A - BD^{-1}C$.
    Si on définit U, V, W, Q ainsi (ce qui est licite, puisque D est supposée inversible), on obtient immédiatement qu'elles conviennent.

    b) On utilise les notations de la question précédente. En prenant le déterminant dans l'égalité $M = \begin{pmatrix} I_n & Q \\ 0 & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U & 0 \\ V & W \end{pmatrix}$, on a donc :
    $$\det M = 1 \times \det U \times \det W.$$
    En utilisant les expressions trouvées ci-dessus de U et W :
    $$\det M = \det(D)\det(A - BD^{-1}C).$$
    Pour obtenir l'expression souhaitée, on utilise d'une part que $\det(D) = \det(D^T)$ et d'autre part que $D^TB = B^TD$ (Q10). D'où :
    $$\det M = \det(D^TA - D^TBD^{-1}C) = \det(D^TA - B^TC).$$
    Or, Q10 dit aussi que $C^TB - A^TD = -I_n$. En passant à l'opposé de la tranposée, on a $D^TA - B^TC = I_n$, d'où $\det M = 1$.

12. a) Soient $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, soient $X, Y \in \mathbb{R}^n$.
    $$\langle MX, Y\rangle = (MX)^TY = X^TM^TY = X^T(M^TY) = \langle X, M^TY\rangle.$$

    b) Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ des réels tels que $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i X_i = 0$. Soit $j \in [\![1, p]\!]$. Alors,
    $$0 = \langle \sum_{i=1}^{p} \lambda_i X_i, X_j\rangle = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \langle X_i, X_j\rangle = \lambda_j \langle X_j, X_j\rangle.$$
    Or, si $X = (x_1, \dots, x_n)$, on calcule immédiatement que $\langle X, X\rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k^2$, de sorte que $\langle X, X\rangle = 0$ ssi $X = 0$. Comme les X_j sont supposés non nuls, on tire de l'égalité précédente $\lambda_j = 0$. Ceci montre la liberté de la famille $(X_1, \dots, X_p)$.

c) On a $DX = -\alpha BX$ et $DY = -\beta BY$. De plus,

$$\langle BX, DY\rangle = \langle X, B^T DY\rangle = \langle X, D^T BY\rangle = \langle DX, BY\rangle,$$

en utilisant à la fois la question Q12a) et la symétrique de $B^T D$. Ainsi,

$$-\beta\langle BX, BY\rangle = -\alpha\langle BX, BY\rangle.$$

Comme α et β sont supposés distincts, ceci implique $\langle BX, BY\rangle = 0$ et donc $\langle DX, DY\rangle = \alpha\beta\langle BX, BY\rangle = 0$.

13. Soit $X \in \operatorname{Ker} B \cap \operatorname{Ker} D$. On note $\tilde{X}$ le vecteur de $\mathbb{R}^{2n}$ dont les n premières coordonnées sont nulles et les n dernières celles de X. Alors,

$$M\tilde{X} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ X \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Comme $M \in \mathrm{Sp}_{2n}$, M est inversible et donc $\tilde{X} = 0$. Donc, $X = 0$.

14. Soit $i \in [\![1, p]\!]$. Si DX_i était nul, comme $DX_i = -\alpha_i BX_i$ et que $\alpha_i \neq 0$, on aurait aussi $BX_i = 0$, d'où $X_i \in \operatorname{Ker} B \cap \operatorname{Ker} D = \{0\}$, ce qui est exclu. Donc, $DX_i \neq 0$.

Par Q12c), on a $\langle DX_i, DX_j\rangle$ pour tous $i \neq j$. Comme de plus les DX_i sont non nuls, Q12b) montre que la famille $(DX_1, \ldots, DX_p)$ est libre.

15. Si p est comme dans la question précédente, on a donc $p \leq n$ puisque $(DX_1, \ldots, DX_p)$ est une famille libre dans un espace de dimension n. Donc, si on considère $n+1$ réels non nuls deux à deux distincts, $\alpha_1, \ldots, \alpha_{p+1}$, il existe au moins un indice $i \in [\![1, p+1]\!]$, pour lequel $\operatorname{Ker}(D + \alpha_i B) = \{0\}$. Alors, cet α_i convient : $D + \alpha_i B$ est inversible.

16. Soit α comme dans la question précédente. On a

$$K(-\alpha)M = \begin{pmatrix} A & B \\ \alpha A + C & \alpha B + D \end{pmatrix}.$$

En notant N cette matrice, on a $N \in \mathrm{Sp}_{2n}$ et le bloc en bas à droite de N est inversible par construction. Q11 s'applique donc et $\det N = 1$. Comme on a aussi $\det K(-\alpha) = 1$, on en déduit $\det M = 1$.

2.4 Espaces symplectiques et symplectomorphismes

17. Soient $x, x' \in E$, soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Soit $y \in F$. On a

$$\begin{aligned} \ell_{\alpha x + \beta x'}(y) &= \omega(\alpha x + \beta x', y) \\ &= \alpha\omega(x, y) + \beta\omega(x', y) \\ &= \alpha\ell_x(y) + \beta\ell_{x'}(y) \\ &= (\alpha\ell_x + \beta\ell_{x'})(y). \end{aligned}$$

Ceci étant vrai pour tout $y \in F$, on a donc $\ell_{\alpha x+\beta x'} = \alpha\ell_x + \beta\ell_{x'}$, c'est-à-dire $\phi(\alpha x + \beta x') = \alpha\phi(x) + \beta\phi(x')$, ce qui montre la linéarité.

18. Si $x \in E$, notons que $\phi(x) = 0$ ssi $\forall y \in F, \omega(x, y) = 0$ ssi $x \in F^\omega$. Donc, $\operatorname{Ker} \phi = F^\omega$. Le théorème du rang donne :

$$\dim \operatorname{Ker} \phi + \dim \operatorname{Im} \phi = \dim E.$$

Par surjectivité de ϕ, $\dim \operatorname{Im} \phi = \dim F^* = \dim F$. D'où

$$\dim F^\omega = \dim E - \dim F.$$

19. Soit $e \in E - \{0\}$. Par hypothèse de non-dégénerescence, on peut trouver $g \in E$ tel que $\omega(e, g) \neq 0$. Notons $\lambda = \omega(e, g)$ et posons $f = \dfrac{g}{\lambda}$. Alors,

$$\omega(e, f) = \omega(e, \frac{g}{\lambda}) = \frac{1}{\lambda}\omega(e, g) = 1.$$

20. Soit $x \in H \cap H^\omega$. On peut écrire x sous la forme $x = \alpha e + \beta f$. Alors, par bilinéarité et antisymétrie/caractère alterné de ω,

$$\omega(x, e) = \alpha\omega(e, e) + \beta\omega(f, e) = -\beta \text{ et de même } \omega(x, f) = \alpha.$$

Comme x est aussi dans H^ω et que e et f sont dans H, on a donc $-\beta = \alpha = 0$. Donc $x = 0$. Ainsi, $H \cap H^\omega = \{0\}$.

Donc, H et H^ω sont en somme directe. Mais, par Q18, la somme de leur dimension vaut $\dim E$. Donc, $E = H \oplus H^\omega$.

21. *Malheureusement, il y avait une erreur d'énoncé ; il fallait lire* $\omega(e_i, f_j) = \delta_{i,j}$.

Considérons d'abord la situation de la question précédente et notons $\tilde{\omega}$ la restriction de ω à $H^\omega \times H^\omega$. Il s'agit d'une forme bilinéaire alternée ; elle est de plus non dégénérée. En effet, si x vérifie $\tilde{\omega}(x, y) = 0$ pour tout y dans H^ω, comme x vérifie $\omega(x, z) = 0$, pour tout z dans H (par définition de H^ω), on a par bilinéarité $\omega(x, u) = 0$ pour tout u dans E. Comme $\tilde{\omega}$ est non dégénérée, ceci implique que $x = 0$.

Ainsi, dans la situation précédente, $\tilde{\omega}$ est une forme symplectique sur H^ω. On procède alors par récurrence, en utilisant Q24 et Q25. (XXX)

22. Remarquons déjà que si $M \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$, le coefficient $m_{i,j}$ de M peut être obtenu comme le produit matriciel $X_i^T M X_j$ où X_i et X_j sont les matrices colonnes avec un 1 en i-ème / j-ème position, et des 0 ailleurs.

Avec cette remarque, on note E_i et F_j les matrices colonnes correspondant dans la base $\mathbf{b}$ aux e_i et f_j ; elles sont du type précédent et on a donc :

$$E_i^T J E_j = 0, F_i^T J F_j = 0, F_j^T J E_i = -1 \text{ et } E_i^T J F_j = \delta_{i,j},$$

pour tous $i, j \in [\![1, n]\!]$. Par bilinéarité, on en déduit que pour tous vecteurs x, y de E, représentés par des matrices colonnes X et Y dans la base $\mathbf{b}$,

$$X^T JY = \omega(x, y).$$

Soit maintenant f un endomorphisme de E, représenté par M dans la base $\mathbf{b}$. Alors, f est un symplectomorphisme ssi $\forall x, y \in E, \omega(f(x), f(y)) = \omega(x, y)$ ssi $\forall X, Y \in \mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{R}), (MX)^T JMY = X^T JY$ ssi $M^T JM = J$ ssi $M \in \mathrm{Sp}_{2n}$. (XXX)

23. On constate que d est une forme $2n$-linéaire. On montre qu'elle est alternée (XXX) et on conclut en utilisant que l'espace des formes $2n$-linéaires alternées sur E est de dimension 1, engendré par $\det_{\mathbf{b}}$.

24. On souhaite calculer $d(e_1, f_1, e_2, f_2, \ldots, e_n, f_n)$. Il faut comprendre quelles permutations donnent un terme non nul. Le terme sera non nul si dans un ω, e_k est toujours mis avec f_k. Choisir une telle permutation revient à choisir une permutation de $[\![1, n]\!]$, puis un choix de l'ordre de e_k et f_k pour chaque k, ce qui fait donc $n! \times 2^n$ permutations possibles. De plus, toutes vont donner la même contribution dans la somme : la permuation des indices k (en gardant toujours e_k devant f_k) induit une permutation des e_k et f_k de signature paire (car on fait la même permutation sur les e_k et sur les f_k) ; de plus, chaque transposition d'un e_k avec un f_k multiplie la signature et le résultat du ω correspondant de -1 (ce qui laisse invariant le terme globalement). Ainsi,
$$d(e_1, f_1, \ldots, e_n, f_n) = 2^n n! \omega(e_1, f_1) \ldots \omega(e_n, f_n) = 2^n n!.$$
D'autre part, $\det_{\mathbf{b}}(e_1, f_1, \ldots, e_n, f_n) = (-1)^{n(n-1)}2$. En effet, $\mathbf{b} = (e_1, \ldots, e_n, f_1, \ldots, f_n)$ et on passe d'une famille à l'autre en opérant $\dfrac{n(n-1)}{2}$ transpositions des vecteurs.

25. On définit une forme symplectique $\mathbb{R}^{2n}$ par

$$\omega(x, y) = X^T JY.$$

(XXX on reprend les explications de Q22 à l'envers). On sait que si $M \in \mathrm{Sp}_{2n}$ alors l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^{2n}$ associé est un symplectomorphisme. Alors, f vérifie :

$$\forall x_1, \ldots, x_{2n} \in E, d(f(x_1), \ldots, f(x_{2n})) = d(x_1, \ldots, x_{2n}),$$

vu l'expression de d. Par les questions précédentes, on a donc :

$$\forall x_1, \ldots, x_{2n} \in E, \det_{\mathbf{b}}(f(x_1), \ldots, f(x_{2n})) = \det_{\mathbf{b}}(x_1, \ldots, x_{2n}).$$

En effet, d et $\det_{\mathbf{b}}$ coïncident à un facteur non nul près (la valeur exacte de λ n'est pas importante.

Par définition, on a donc $\det f = 1$. Donc $\det M = 1$.